AS SIMETRIAS NO CUBO COMO INSTRUMENTO DE ANÁLISE E PESQUISA DA FORMA

Aline Luciano Silva [1]

Roberto Alcarria do Nascimento[2]

SILVA, A. L.; NASCIMENTO, R. A. do. As simetrias no cubo como instrumento de análise e pesquisa da forma. **Revista Educação Gráfica**, Bauru, n.8, p.39-48, 2004.

Resumo

Este trabalho apresenta uma análise geométrica dos eixos rotacionais do cubo e de planos secantes em função desses mesmos eixos, propondo uma leitura de formas poliédricas regulares e semi-regulares inscritas no hexaedro regular. Propõe que a articulação entre eixos rotacionais e seções planas pode se constituir num importante instrumento de análise e pesquisa que possibilita a geração de infinitas outras configurações, apresentando-se como mais uma ferramenta disponível para arquitetos, designers e outros profissionais envolvidos com a organização espacial da forma.

Palavras-chave: cubo, simetria, eixos rotacionais, planos secantes, formas poliédricas.

[1] Bolsista PIBIC/CNPq - Curso de Desenho Industrial/Programação Visual - FAAC – UNESP – Campus de Bauru

[2] Professor do Departamento de Artes e Representação Gráfica – FAAC – UNESP – Campus de Bauru

Abstract

This work presents a geometric analysis of the rotational cube axes and cutting planes regarding this same axes, suggesting a reading of the regular and semi-regular polyhydric form inscribed on the regular hexahedra. It suggests that the articulation between rotational axes and sectioning planes can become an important instrument of analysis and investigation that makes the creation of infinite other configurations real, showing itself as another available tool for architects, designers and other professionals in the area of spatial organization of the form.

Keywords: cube, symmetry, rotational axes, cutting planes, polyhydrics forms.

Introdução

As simetrias se constituem num importante instrumento de organização espacial, sendo largamente utilizadas por arquitetos, designers e outros profissionais da forma. Seu emprego permite atribuir características harmônicas e esteticamente agradáveis às formas e objetos, sejam eles de qualquer natureza. A própria natureza pode ser interpretada a partir das simetrias, apresentando uma infinidade de exemplos de sua presença nos mais variados ramos em que costuma ser dividida (WOLF & KUHN, 1959; ROHDE, 1982).

No campo da matemática e, mais especificamente, no da geometria espacial, os poliedros regulares são aqueles que apresentam relações de simetrias muito ricas e costumam ser bastante explorados na organização do espaço tridimensional. Dentre eles, o cubo é o que tem suas regularidades mais explícitas e, sem dúvida, é o mais investigado e utilizado, dada sua simplicidade e capacidade de modulação do espaço.

Normalmente os trabalhos que tratam sobre composição plástica pouco discutem a respeito dos aspectos geométricos da forma e, quando a abordagem parte do ponto de vista das questões matemáticas, acaba se restringindo às propriedades geométricas, sem apontar para a investigação e criação de outras formas. Assim, neste trabalho, o que se pretende é justamente fazer uma análise geométrica dos planos secantes do cubo a partir dos eixos rotacionais no sentido de mostar possibilidades de pesquisa e geração de formas poliédricas com base nesses elementos. Os troncos obtidos a partir das simetrias rotacionais facilitam a tarefa de agrupamento, pois as partes resultantes geralmente guardam relações métricas que definem maior unidade aos conjuntos estabelecidos (NASCIMENTO et al, 2001). Antes de discutir as relações de simetria no cubo, segue uma breve revisão sobre as transformações rígidas no plano.

Simetrias no plano

Weyl (1997) aponta que, na linguagem coloquial, o termo simetria costuma ter dois significados: por um lado pode indicar algo bem proporcionado e, por outro, se caracteriza pela simetria da esquerda para a direita, associada à imagem de uma balança: a simetria bilateral. No campo da matemática, a simetria é explicada como uma operação de transformação isomórfica, ou seja, o objeto ou forma é repetido sem alterar sua configuração. A operação de simetria que mantém a forma, alterando as dimensões é chamada de dilatação, também conhecida como simetria homeomórfica (ROHDE, 1982). Se a operação de simetria conserva a forma e a dimensão é chamada de "transformação rígida" e pode ser de três tipos, conforme ilustrados na figura 1.

- *Translação:* repetição do módulo numa direção e distância determinada (1A).

- *Rotação:* repetição na qual o módulo gira em torno de um ponto segundo um ângulo definido (1B).

- *Reflexão:* a repetição se dá em função de um eixo sendo chamada de simetria axial. É popularmente conhecida como simetria bilateral, pois a figura é repetida tal qual um espelho plano (figura 1C).

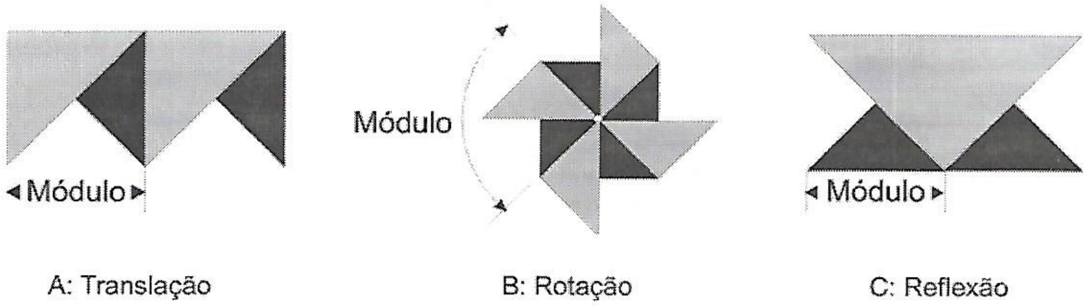


Figura1: Transformações isomórficas rígidas

Simetrias rotacionais no cubo

No espaço tridimensional tais relações de simetria também estão presentes. Entre os poliedros regulares e semi-regulares - os chamados sólidos platônicos e arquimedianos - dadas suas leis de geração, é possível estabelecer-se aspectos simétricos, tanto em relação a eixos, como em relação a planos. Eixos de simetria ou rotacionais se caracterizam por retas passando por dois elementos geométricos opostos do poliedro e que determinam sua ordem (NASCIMENTO, et. al., 2001). Sá (1982) considera que os eixos rotacionais se constituem numa importante forma de análise desses poliedros, ainda que tais eixos só façam sentido nas projeções ortogonais perpendiculares aos mesmos. Costa & Costa (1996) fazem um estudo dos poliedros regulares e semi-regulares, discutindo a projeção ortogonal dos mesmos em função dos eixos rotacionais, apontando que tal procedimento implica significativa simplificação na representação dessas formas. Neste estudo a atenção está voltada para o hexaedro regular, ou cubo, um dos 5 poliedros regulares, sendo formado por 6 faces quadradas, 8 vértices e 12 arestas. Ghyka (1953) aponta para a importância do cubo na formação de malhas poliédricas, por ser o único dos regulares com o qual se pode preencher o espaço sem deixar vazios.

- *Eixo binário:* definido por uma reta que passa pelo ponto médio de duas arestas opostas. O cubo possui ao todo 6 eixos binários distintos. Sua projeção ortogonal num plano perpendicular a um dos eixos binários se reduz a dois retângulos iguais, que são as duas faces visíveis (figura 2). Girando-se o cubo de um ângulo de 180º em torno desse eixo, a imagem coincide com a original (identidade), o que define a ordem do mesmo.

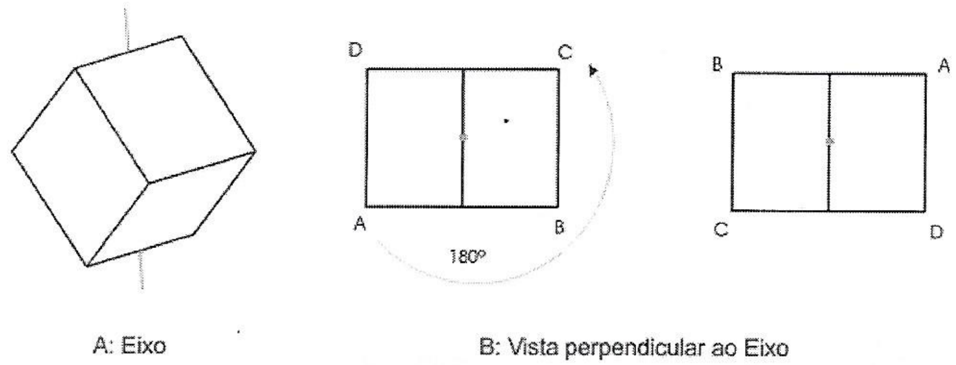


Figura 2: Cubo – eixo binário

- *Eixo ternário:* definido pela reta que liga dois vértices opostos existindo, portanto, quatro eixos ternários. Se o cubo for projetado perpendicularmente ao eixo ternário, têm-se três faces visíveis representadas como losangos. Rotacionando-o em ângulos de 120º em torno do eixo a imagem se repete definindo três identidades, o que determina sua ordem ternária (figura 3).

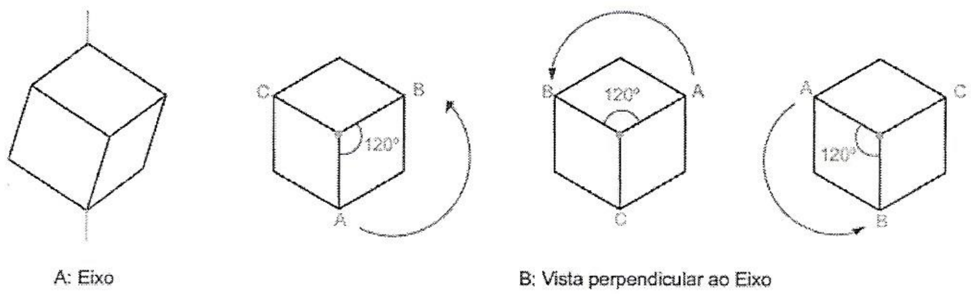


Figura 3: Cubo – eixo ternário

- *Eixo quaternário:* é definido pela reta contendo o centro de duas faces opostas. O cubo possui ao todo três eixos quaternários. Projetando-se perpendicularmente ao eixo quaternário, apenas uma face é visível apresentando-se como um quadrado, cujas identidades se definem ao rotacioná-lo em ângulos 90º. Isso implica que são necessárias quatro rotações de 90º em torno do eixo para se obter a rotação completa de 360º, atribuindo-lhe o caráter de quaternário (figura 4).

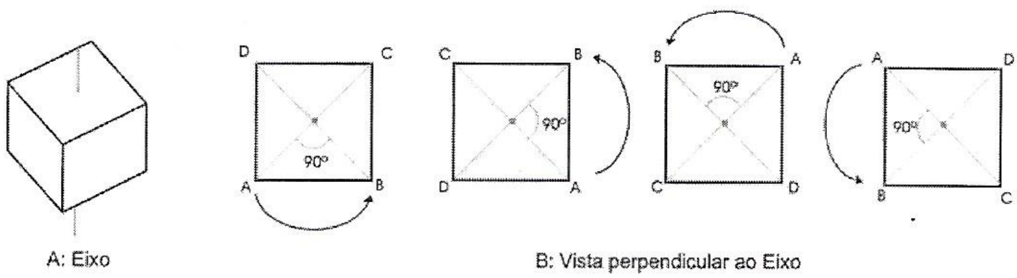


Figura 4: Cubo – eixo quaternário

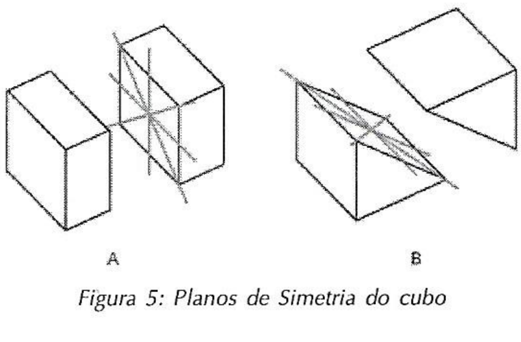
Planos de simetria

Evidentemente, existem infinitas possibilidades diferentes de seccionamento do cubo por um único plano. Entretanto, interessa aqui analisar planos secantes em função dos eixos de simetria que, ainda também sendo infinitos, definem relações interessantes que podem gerar outras formas, regulares ou não, e serem criativamente aproveitadas na reorganização do espaço. Uma classe particular de seções é aquela que define os planos de simetria.

Planos de simetria são entendidos como aqueles seccionamentos que geram duas partes simetricamente iguais, por reflexão. Cada plano de simetria contém quatro eixos rotacionais. O cubo possui ao todo 9 planos de simetria (RANGEL,1982), que dividem-se em dois tipos:

- *Plano de simetria I:* este tipo de plano passa pelo centro de quatro faces e quatro arestas do cubo. Note-se que nele estão contidos dois eixos binários e dois eixos quaternários (figura 5A). O cubo possui três planos distintos que contêm essas mesmas características. A seção resultante deste plano é um quadrado.

- *Plano de simetria II:* Esse segundo tipo é definido por duas arestas opostas do cubo. Note-se que contém dois eixos ternários, um eixo binário e um quaternário (figura 5B). No cubo pode-se encontrar 6 planos distintos com estas mesmas características. A seção resultante deste plano é um retângulo.



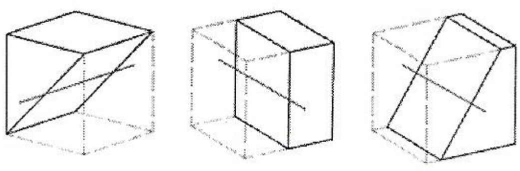
A B

Figura 5: Planos de Simetria do cubo

Outros planos contendo eixos rotacionais

Ainda que não sejam considerados "planos de simetria", o cubo admite outros planos secantes que, pelo fato de conterem os eixos rotacionais, lhes conferem particularidades interessantes. O dado mais significativo é que, se contém um eixo rotacional passa pelo centro do cubo e, assim, o divide em dois volumes iguais. Se rotacionarmos adequadamente uma das partes seccionadas em 180º, as duas ficarão simétricas por reflexão. Estes planos secantes podem ser agrupados em função do eixo rotacional contido nos mesmos.

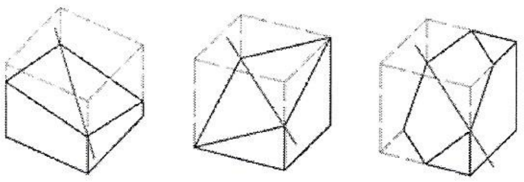
- *Planos contendo o eixo quaternário.* Girando em torno deste eixo o plano varia entre conter duas arestas opostas ou o centro de duas faces opostas. Nos dois casos extremos, o plano secante coincide com os planos de simetria já abordados anteriormente (figuras 6A e 6B). Neste intervalo o plano secante poderá assumir infinitas posições intermediárias, mantendo volumes iguais (figura 6C). As seções podem variar desde um quadrado até o maior retângulo possível que tem lados iguais a "a" e "a raiz de 2", sendo "a" a aresta do cubo.



A B C

Figura 6: Plano secante contendo o eixo quaternário do cubo

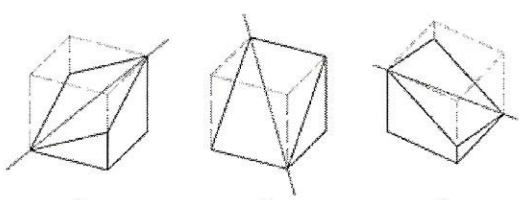
- *Planos contendo o eixo binário.* Girando em torno deste eixo, o plano também pode coincidir com planos de simetrias: quando passar pelo centro de duas arestas, ou quando contiver duas arestas opostas. Nas posições intermediárias entre essas situações especiais existem possibilidades infinitas de planos secantes. As seções resultantes desses seccionamentos variam desde o quadrado – quando é plano de simetria - passando por losangos (figuras 7A e 7B) e chegarem ao hexágono, que será regular quando o plano secante contiver o ponto médio de seis arestas (figura 7C).



A B C

Figura 7: Planos secantes contendo o eixo binário do cubo

- *Planos contendo o eixo ternário.* Girando-se o plano em torno deste eixo ele também ocupa uma posição coincidente com o plano de simetria que contém duas arestas opostas, além das demais infinitas posições possíveis, conforme exemplificado na figura 8. As seções resultantes variam do losango - quando contêm o ponto médio de duas arestas opostas (em A), passam pelo retângulo de lados "a" e "aÖ2" - quando o plano é de simetria (em B) - e diferentes paralelogramos quando contêm pontos quaisquer de arestas opostas (em C).

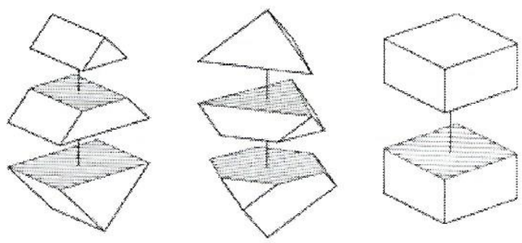


A B C

Figura 8: Planos secantes contendo o eixo ternário do cubo

Planos perpendiculares aos eixos rotacionais

Outro modo interessante de considerar os planos secantes ao cubo é a partir de sua perpendicularidade em relação aos eixos rotacionais (NASCIMENTO et al, 2001). Quando seccionado perpendicularmente ao eixo binário, tem-se secções retangulares (9A); seções perpendiculares ao eixo ternário serão triângulos eqüiláteros ou hexágonos, que tomarão a forma regular quando a seção passar pela altura média entre os vértices opostos (9B); já as seções perpendiculares ao eixo quaternário terão a forma única do quadrado, conforme ilustrado em 9C.



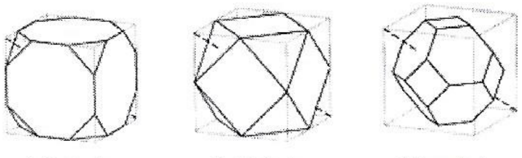
A B C

Figura 9. Cubo seccionado em função do eixo binário, ternário e quaternário.

Gerando poliedros regulares e semi-regulares

Quando se aplicam seccionamentos múltiplos no cubo em função de seus eixos rotacionais é possível gerar infinitas outras formas que sempre apresentam certas regularidades e propriedades métricas especiais, como acontece com alguns dos poliedros regulares e semi-regulares. Considerando-se a relação de perpendicularidade entre eixo e plano secante, o ternário é, dos três eixos, aquele que se apresenta como o mais interessante, por permitir maiores possibilidades de geração de outras formas que conservam determina-das regularidades. O eixo quaternário não propicia grandes resultados já que os seccionamentos perpendiculares aos mesmos sempre serão paralelos às faces, gerando apenas prismas retos.

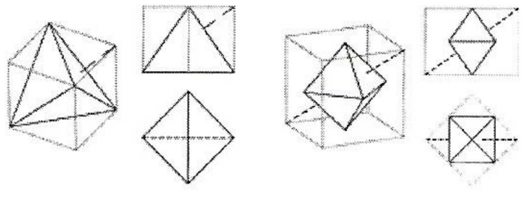
Assim, tomando-se por base planos perpendiculares ao eixo ternário do cubo é possível obter, entre outros, o troncocubo (ou triaoctogonal) formado por seis octógonos regulares e 8 triângulos eqüiláteros (figura 10A). À medida que os planos secantes atingem maiores proporções do cubo, novas figuras vão sendo geradas. Se o plano secante atingir o ponto médio das arestas, a figura gerada será o cuboctaedro (ou triatetragonal), formado por 6 quadrados e 8 triângulos eqüiláteros (figura 10B). Se o plano secante avançar um pouco mais para o interior do cubo, de modo a atingir a quarta parte da mediana de cada face, o resultado será um troncoctaedro (ou tetraexagonal), formado por 6 quadrados e 8 hexágonos regulares (figura 10C).



A: Troncocubo B: Cuboctaedro C: Troncoctaedro

Figura 10: Poliedros semi-regulares gerados pelo seccionamento do cubo

O tetraedro regular (figura 11A) é obtido por 4 planos secantes, cada um deles perpendicular a um dos eixos de simetria ternário, de modo a se organizarem numa simetria de reflexão dois a dois. Cada um deles corta a diagonal de três faces do cubo, passando por três vértices distintos. A parte retirada, no final de cada seccionamento, tem o formato de um triedro (GHYKA, 1953). O octaedro também é gerado do cubo a partir de seções perpendiculares aos eixos ternários, sendo que deverão ocorrer duas seções em relação a cada eixo, dispostos numa simetria de inversão (rotação de 180º) em relação ao centro. Cada plano secante passa pelo centro de 3 faces adjacentes do cubo, conforme ilustrado em 11B.



A: Tetraedro B: Octaedro

Figura 11: Poliedros regulares gerados a partir do seccionamento do cubo

Considerando-se o eixo binário como referência para o seccionamento plano, também é possível obter figuras bastante interessantes. O dodecaedro romboidal é obtido por planos secantes perpendiculares aos eixos binários de modo que tais planos passem pelo ponto médio das arestas paralelas de duas faces adjacentes, conforme figura 12. O poliedro fica constituído de 12 losangos iguais.

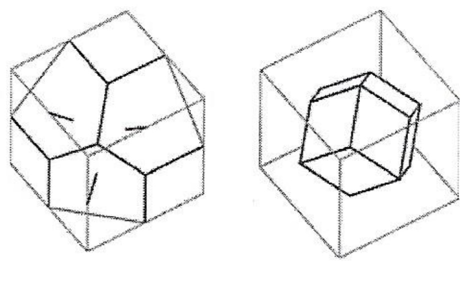


Figura 12: Dodecaedro Romboidal

Combinando-se seções planas perpendiculares aos eixos binário e ternário, é possível obter-se o semi-regular denominado rombicuboctaedro ou triatetragonal e ainda o troncocuboctaedro. No primeiro caso, os planos secantes perpendiculares aos eixos binários deverão passar pelos vértices de um octógono inscrito em cada face do cubo (figura 13a). Oito planos secantes perpendiculares aos eixos ternários do cubo completam o poliedro, que fica formado por 18 quadrados e 8 triângulos eqüiláteros, conforme ilustrado na figura 13b. Na geração do troncocuboctaedro os planos perpendiculares aos eixos binário e ternário devem conter os lados de um octógono regular, centrado em cada uma das faces do cubo, conforme relações indicadas em 13c. O poliedro fica formado por 6 octógonos, 8 hexágonos e 12 quadrados (figura 13d)

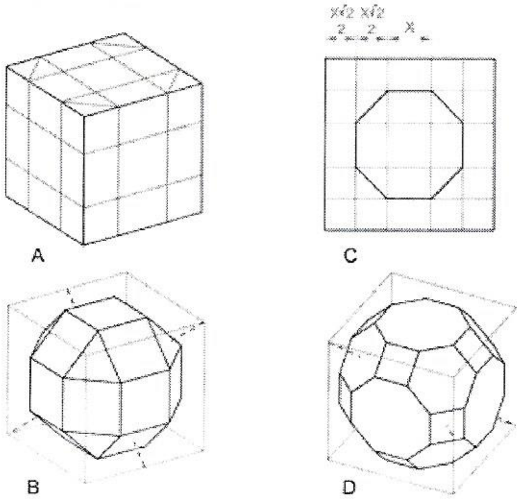


Figura 13: Rombicuboctaedro e troncocuboctaedro inscritos no cubo

Ainda dentre os semi-regulares obtidos diretamente da seção do cubo há o chamado cubo rombo, formado por 6 quadrados e 32 triângulos eqüiláteros. As 6 faces quadradas ficam contidas nas faces do cubo envolvente, porém ligeiramente rotacionadas em relação a estas. Oito planos perpendiculares aos eixos ternários do cubo envolvente definem 8 faces triangulares do semi-regular. As demais faces triangulares são obtidas por planos que não estabelecem relações de paralelismo ou perpendicularidade com os eixos rotacionais (Rangel, 1982). Na bibliografia disponível, apenas Martinez (s/d), faz referência às relações existentes entre o cubo rombo e o cubo envolvente, indicando as coordenadas dos vértices da face quadrada daquele com a face deste, conforme figura 14a. O sólido construído a partir de tais relações aparenta apresentar, em alguns aspectos, uma aproximação muito grande com a secção áurea. Assim, a figura foi refeita seccionando-se o eixo ternário do cubo de modo que a distância entre os planos secantes que definem faces opostas fosse igual à seção área da diagonal tomada como eixo (figura14b). Em seguida, o quadrado em cada face do cubo foi desenhado de modo que cada vértice estivesse no ponto que define a secção áurea da interseção entre o plano secante anterior e a própria face do cubo (figura 14c). O poliedro final é mostrado em 14d o qual, partindo-se da aresta do cubo tomada como unidade, apresentou uma diferença de cinco centésimos entre as arestas das faces triangulares e das quadradas. Registra-se que não foi encontrada qualquer menção sobre relação áurea entre as duas figuras, na bilibliografia consultada. Entretanto, ainda que dependente de um maior aprofundamento teórico, o resultado aponta nessa direção.

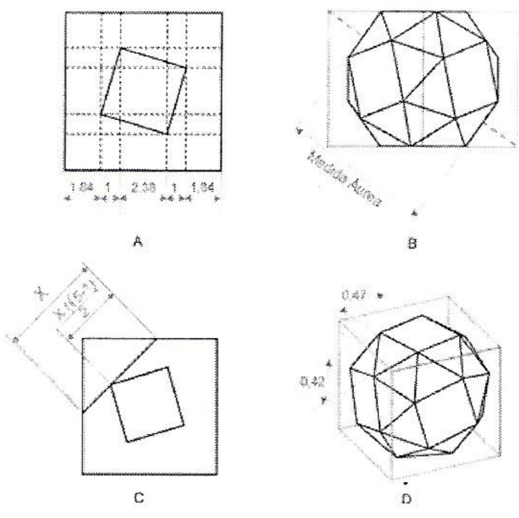


Figura 14: O cubo rombo e suas relações com a secção áurea

Evidentemente as possibilidades de geração de formas poliédricas, tomando-se como referência os eixos rotacionais do cubo, são infinitas. Contudo, partindo-se de algumas relações préestabelecidas os resultados podem ser muito interessantes. Assim, ainda considerando planos perpendiculares ao eixo binário de modo a seccionar o cubo numa relação convenientemente definida, é possível obter um poliedro formado por 12 hexágonos e 6 quadrados com todas as arestas iguais, conforme figura 15. Não se trata de um poliedro semi-regular, já que não poderia ter ângulos sólidos formados por 3 hexágonos regulares (neste caso a soma dos três ângulos seria igual a 360, o que tornaria os nós planos). Ainda que os hexágonos não sejam regulares, não deixa de ser uma figura especial pelo fato de apresentar dois tipos de ângulos sólidos e manter todas as arestas congruentes entre si.

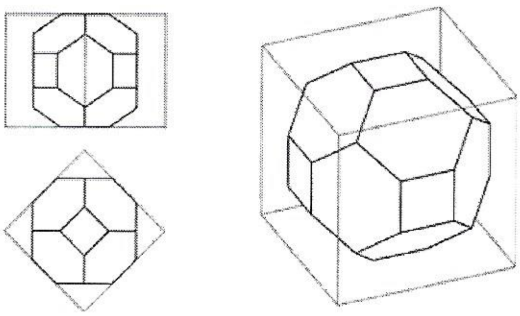


Figura 15: Poliedro convexo formado por quadrados e hexágonos não regulares em que todas as arestas são iguais entre si.

O icosaedro e o dodecaedro regulares também podem ser formados a partir do seccionamento do cubo. Contudo, nestes dois casos, os planos secantes não são perpendiculares ou paralelos aos eixos rotacionais, ainda que conservem relações de simetria de outra natureza. Tanto o icosaedro quanto o dodecaedro estabelecem com o cubo uma relação com base na divisão áurea de sua aresta (GHYKA, 1953). A aresta de um icosaedro inscrito no cubo é igual ao segmento áureo da aresta do cubo, conforme figura 16a. Assim são necessários 20 planos seccionando o cubo, passando pelos extremos de três segmentos áureos distintos localizados no centro de cada face do cubo (figura 16b). Já o dodecaedro inscrito no cubo tem sua aresta igual à diferença entre a aresta do cubo e a aresta do icosaedro inscrito no mesmo cubo (figura 16a). Para obter o dodecaedro através do cubo são necessários 12 planos secantes. Dispõem-se 6 arestas do dodecaedro nas 6 faces do cubo, de modo a estarem centralizadas e ortogonalmente relacionadas entre si. Cada plano é definido pela extremidade de um dos segmentos e contém um outro segmento na face adjacente (figura 16c).

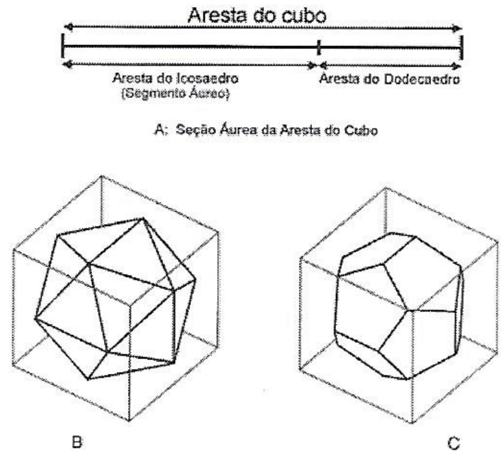


Figura 16: Icosaedro e Dodecaedro inscritos no cubo

Considerações finais

Evidentemente, os eixos rotacionais do cubo e o seccionamento do mesmo não se constituem novidades no campo geométrico, sendo bastante explorados na literatura. O propósito aqui foi o de realçar e agregar os dois componentes, apontando para o fato de que executar seções planas com base nos eixos rotacionais pode se constituir num método de pesquisa que possibilita uma outra leitura da forma poliédrica. Nesse sentido, a utilização da computação gráfica facilita o processo de pesquisa e experimentação. Programas gráficos que operam com precisão bastante acentuada, como por exemplo o AutoCAD, permitem a verificação e a checagem das formas obtidas, comprovando ou refutando hipóteses inicialmente levantadas. A aproximação entre o cubo rombo e a relação áurea, aqui discutida, só foi possível tendo a computação gráfica como ferramenta de representação.

Não apenas a exploração de formas regulares e semi-regulares inscritas no cubo, como algumas das quais foram aqui analisadas, mas infinitas outras possibilidades se abrem na busca de novas relações. A recomposição do espaço tridimensional, utilizando-se das partes retiradas do cubo quando da obtenção das formas básicas, também é uma outra maneira de investigar soluções criativas no trabalho com a forma.

Além de propiciar a descoberta de novas configurações, a estratégia aqui proposta ainda facilita o estabelecimento de relações entre as formas mais usuais, comumente tratadas isoladamente, enriquecendo o conhecimento das mesmas e abrindo perspectivas para uma aplicação mais consciente nos diferentes ramos profissionais.

Referências bibliográficas

COSTA, M. D.; COSTA, A. P. de A. V. Simetrias rotacionais nos poliedros. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENGENHARIA GRÁFICA NAS ARTES E NO DESENHO, 1; SIMPÓSIO NACIONAL DE GEOMETRIA DESCRITIVA E DESENHO TÉCNICO, 12, 1996, Florianópolis. **Anais Graphica96**. Florianópolis: UFSC, ETFSC, ABPGDDT, 1996. 521p.

GHIKA, M. **Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes**. Bueno Aires: Poseidón, 1953.

MARTINEZ, E. D. **Poliedros semirregulares**: I parte – poliedros eqüiângulos. Sevilla: Departamento de Expresion Gráfica Arquitectonica – Escuela Técnica Superior de Arquitectura de la Universidad de Sevilla, s/d. (198?)

NASCIMENTO, R. A . et. al. Seccionamento virtual de poliedros regulares: uso de novas tecnologias na pesquisa da forma tridimensional. In: CONGRESSO IBEROAMERICANO DE EXPRESIÓN GRÁFICA PARA LA INGENIERÍA Y LA ARQUITECTURA, 3, 2001, Habana. **Anais Cibergraf 2001**. Habana: ISPJAE, 2001, CD.

PEARCE, P. **Structure in nature is a strategy for design**. Cambridge: The MIT Press, 1990.

RANGEL, Alcyr. P. **Poliedros.** Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1982.

ROHDE, G. M. **Simetria**. São Paulo: Hemus, 1982.

SÁ, J. R. C. C. **Edros**. São José dos Campos, 1982 (mimeografado).

WEYL, H. **Simetria**. São Paulo: Edusp, 1997.

WOLF, K. L; KUHN, D. **Forma y simetría**: una sistemática de los cuerpos simétricos. Buenos Aires, Eudeba, 1959.