

## A APLICAÇÃO DE MALHAS NA GEOMETRIA DO PROJETO WATER CUBE: UM ESTUDO DIRIGIDO A FORMAÇÃO EM ARQUITETURA

### *THE APPLICATION OF MESHES IN THE GEOMETRY OF THE WATER CUBE PROJECT: A STUDY AIMED AT TRAINING IN ARCHITECTURE*

Fernando Franz Zauk<sup>1</sup>

Janice de Freitas Pires<sup>2</sup>

#### Resumo

Nos últimos anos, a adoção do projeto paramétrico facilitou a representação e proposição de formas complexas no projeto de arquitetura, permitindo resgatar geometrias de alto desempenho, aplicadas no passado por arquitetos como Gaudí e Otto. Neste trabalho, busca-se compreender o emprego da geometria complexa em projetos, especialmente aqueles configurados a partir de malhas. Parte-se de uma revisão de literatura sobre o uso de malhas na arquitetura, reconhecendo suas características e as associações com seus princípios geométricos. São estudados projetos referenciais, como o Water Cube, que emprega malhas para a representação e construção de sua estrutura em bolhas, com o objetivo de reconhecer o processo de projeto e sistematizar uma estrutura do saber para o ensino de arquitetura. Esta, nos termos da Teoria Antropológica da Didática, de Chevallard (1999), abarca elementos teóricos e tecnológicos, tal como a sistematização dos processos de modelagem. O resultado é a explicitação do saber referente ao projeto analisado, que coloca em evidência a importância da geometria no processo de projeto aliada aos demais requisitos de projeto.

**Palavras-chave:** projeto paramétrico; geometria complexa; malhas; Water Cube; ensino de arquitetura.

#### Abstract

In recent years, the adoption of parametric design has facilitated the representation and proposition of complex shapes in the architectural design, allowing the recovery of high-performance geometries, applied in the past by architects such as Gaudí and Otto. In this work, we seek to understand the use of complex geometry in projects, especially those configured from meshes. It starts with a literature review on the use of meshes in architecture, recognizing their characteristics and associations with their geometric principles. Reference projects are studied, such as Water Cube, which uses meshes to represent and build its bubble structure, aiming to recognize the design process and to systematize its structure of knowledge for teaching architecture. This, in terms of the Anthropological Theory of Didactics, by Chevallard (1999), encompasses theoretical and technological elements, such as the systematization of modeling processes. The result is the explanation of knowledge's structure regarding the analyzed project, which highlights the importance of geometry in the design process combined with other design requirements.

**Keywords:** parametric design; complex geometry; meshes; Water Cube; architectural teaching.

---

<sup>1</sup> Mestre em Arquitetura e Urbanismo, PROGRAU – Programa de Pós-Graduação em Arquitetura e Urbanismo, UFPel, Pelotas, RS, Brasil, ferzauk@gmail.com; ORCID: 0000-0002-2706-7315.

<sup>2</sup> Professora Doutora em Arquitetura e Urbanismo, PROGRAU – Programa de Pós-Graduação em Arquitetura e Urbanismo, UFPel, Pelotas, RS, Brasil, janicepires@gmail.com; ORCID 0000-0002-1975-3147.

## 1. Introdução

No contexto atual, a arquitetura é favorecida por processos de projeto que são concebidos de maneira computacional, em sistemas digitais que possibilitam ir além da representação. Um destes é o projeto paramétrico, que, segundo Hernandez (2004), representa um avanço significativo na evolução do projeto arquitetônico, possibilitado pelos aprimoramentos nos softwares gráficos que incorporam essa tecnologia. Trata-se de um processo baseado no pensamento algorítmico, no qual os elementos do design são formalmente definidos e suas relações são codificadas por meio de expressões (Jabi et al., 2017). Ao estabelecer a definição da geometria de cada elemento do design, mesmo que implicitamente, valoriza-se a sequência de desenvolvimento do projeto e suas relações internas. Segundo Jabi et al. (2017), o foco na representação final do modelo cede lugar à integração entre a geometria e as soluções do projeto. Neste sentido, Kolarevic (2005) caracteriza o projeto paramétrico como um método colaborativo, integrando diversas etapas do processo, como design, análises e simulações de desempenho (estrutural, térmico e acústico), bem como a fabricação e montagem.

Com essa abordagem, a representação e proposição de formas complexas no processo de projeto de arquitetura foram facilitadas, permitindo resgatar geometrias de alto desempenho - já aplicadas no passado por Gaudí e Otto, arquitetos que possuíam amplos conhecimentos de matemática e física. Segundo Kolarevic (2005), estas geometrias vêm substituindo as formas lineares que predominavam na arquitetura contemporânea até então.

No entanto, Pires, Pereira e Gonçalves (2017) destacam que o ensino da geometria deve subsidiar a aprendizagem em modelagem paramétrica, a partir de um reconhecimento progressivo do vocabulário geométrico, desde os elementos mais básicos até níveis mais complexos, para facilitar a compreensão das técnicas de geração, seus parâmetros de controle e a lógica entre os elementos geométricos. Leopold (2003) destaca que deve haver uma integração entre o ensino da geometria e outras disciplinas, para promover uma compreensão mais abrangente das implicações formais, estruturais, estéticas e de eficiência na arquitetura.

Além disso, entende-se que o ensino da representação gráfica digital deve transcender a mera habilidade técnica e avançar para uma compreensão mais profunda e integral da estrutura do saber – tal como definido por Chevallard (1999), reunindo os seguintes elementos: uma categoria de problemas; as técnicas que oferecem soluções para os problemas; as tecnologias que justificam e explicam o funcionamento das técnicas; e as teorias que cumprem o mesmo papel de explicação e justificação em relação às tecnologias. Entende-se que essa abordagem promove uma maior autonomia dos estudantes em relação a sua aprendizagem.

Identificou-se em trabalhos anteriores que, assim como Gaudí e Otto incorporavam conhecimentos geométricos e de desempenho em suas obras por meio de estruturas em malhas, essa abordagem é amplamente empregada na arquitetura contemporânea, principalmente por meio do desenho paramétrico em ambiente digital. Em Zauk e Pires (2023) Autores como Pottmann et al. (2007) destacam que na modelagem computacional a malha é aplicada para simplificar a geometria por meio de triangulação da superfície. Elas são também utilizadas para subdividir superfícies complexas a fim de resolver e suavizar superfícies não convencionais (Pan et al., 2016), são empregadas em análises e processos de otimização de questões estruturais (Fleischmann; Ahlquist, 2009) e também voltadas à criação de modelos resultantes de simulações de forças físicas. Além disso, também resolvem questões pertinentes à construção, uma vez que qualquer forma curva pode ser construída a partir de painéis planos (Fleischmann; Ahlquist, 2009,) e oferecem a possibilidade de padronização (Shimada; Gossard, 1998), reduzindo a necessidade de múltiplos moldes na construção.

Com interesse didático, de 2021 a 2023 foi desenvolvida uma pesquisa de mestrado por (Zauk, 2023) que buscou identificar e sistematizar a estrutura de saber envolvida em projetos de arquitetura que empregam malhas em projetos paramétricas na sua concepção e na construção, tendo por base teórica a noção estrutura de um saber, de Chevallard. A pesquisa identificou, durante o processo de revisão de literatura, características e funções das malhas na arquitetura. Por meio de estudo dirigido a um conjunto de quatro projetos referenciais, a investigação buscou corroborar as funções identificadas no discurso dos arquitetos ou ampliar para outras aplicações não citadas pelos autores de referência. Todo este processo foi também apoiado pelo desenvolvimento de modelagem paramétrica da estrutura de cada projeto. Neste artigo apresenta-se o estudo realizado para o projeto Walter Clube como um caso emblemático que envolve complexidade geométrica e questões de sustentabilidade.

## 2. Metodologia

Inicialmente, foi realizada uma revisão bibliográfica sobre o emprego de malhas na arquitetura, reconhecendo suas características e associações com seus princípios geométricos. Esta foi sistematizada em Zauk e Pires (2023a), na qual se destacam as contribuições de Pottmann et al. (2007), que explicita os princípios matemáticos e a geometria na prática arquitetônica, bem como a investigação de Luo (2014) e Lima (2021), que reconhecem diversas abordagens e finalidades das malhas na arquitetura. A partir desses autores foram identificadas classificações para as malhas quanto à geometria das suas faces (sendo regular, semi-regular ou irregular) e quanto à função da malha no projeto (representação digital, uso computacional, tesselação, otimização formal ou estrutural e geração da forma).

A partir da análise de conceitos geométricos em estudos de caso específicos, busca-se explicitar conexões entre a prática arquitetônica e o ensino de arquitetura. Utiliza-se a abordagem da noção estruturada de um saber, visando explicitar técnicas, tecnologias e teorias envolvidas em cada função das malhas presentes nos projetos estudados. O escopo da pesquisa incluiu a análise de projetos que foram organizados em complexidade geométrica crescente, pela característica de um processo de ensino. O estudo de caso que será apresentado tem sua complexidade geométrica e estrutural relacionada ao modelo geométrico das bolhas de sabão, a qual, por sua vez, se relaciona com aspectos de sustentabilidade.

A explicitação da estrutura de saber abarcou os aspectos teóricos, tecnológicos e técnicos identificados nos discursos dos arquitetos responsáveis e em fontes de arquitetos e pesquisadores que também analisam o projeto. Tendo-se como base estes elementos, foram desenvolvidos processos de modelagem paramétrica. Com isso, a proposta é de reunir uma estrutura integral do saber, nos termos de Chevallard (1999). Para este autor, quando o saber é transposto de um contexto científico e/ou profissional para o de ensino, ele passa por adaptações e transformações. Com isto, entende-se que a transposição do saber teórico para a prática do uso de malhas na arquitetura, na configuração de geometrias complexas, baseia-se em uma base teórica que envolve os conceitos e técnicas associadas a modelagem, que aqui se desenvolve por meio da programação visual do desenho paramétrico das obras arquitetônicas contemporâneas selecionadas.

### 3. O conceito do projeto Water Cube

Considerado um dos projetos mais inspiradores dos últimos anos, devido a sua grande dimensão e forma não convencional, o Centro Aquático Nacional de Pequim (Figura 1A) é primeiro e o único exemplo de estrutura baseada na espuma (bolhas) em grande escala (Senses, 2007). Seu uso relacionado com esportes aquáticos e a forma linear do prédio lhe garantem o nome de Water Cube.

Figura 1: Dualidade dos projetos Water Cube (A) e Bird's Nest (B) em fotografia noturna.



Fonte: Klook (c2022).

Com o início do projeto datado em 2003 e sua execução finalizada em outubro de 2007, a edificação é um centro aquático localizado na cidade de Pequim, na China, e construído para atender os jogos olímpicos de 2008. Na época, o crescimento da cidade já era evidente, preocupando o governo com questões de infraestrutura e sustentabilidade local (Pohl, 2008). Devido a isso, os concursos para os prédios olímpicos possuíam a intenção de abordar propostas com soluções inovadoras para atender a capital chinesa (Eccles; Edmondson; Karadzhova, 2010). Consequentemente, o projeto do Water Cube possui uma preocupação com eficiência energética, bem como o interesse na conservação da edificação, visto que a sustentabilidade é uma das características marcantes no desenvolvimento de projetos no escritório Arup (Eccles; Edmondson; Karadzhova, 2010).

Liderados por Arup Project Management, a equipe responsável pelo projeto é resultado de um consórcio entre as empresas australianas Arup e PTW Architects, com a empresa chinesa China Construction Design International (CCDI). Porém, a parceria não chegava a um consenso sobre o conceito, definindo-o apenas com a revelação do projeto de outro estádio olímpico (Eccles; Edmondson; Karadzhova, 2010). Então, além da referência às bolhas, o Water Cube destaca o contraste dos dois estádios, evidenciando o "yin-yang", importante conceito na cultura chinesa (Zou; Leslie-Carter, 2010). Em Eccles, Edmondson e Karadzhova (2010), um engenheiro da Arup relata que a cor vermelha e as curvas do estádio nacional (Bird's Nest, Figura 1 B) foram determinantes para definir o quadrado e o azul como conceito para o Water Cube (Figura 1 A), pois representam os opostos que se completam: o quadrado e o círculo, o azul e o vermelho, a água e o fogo (Figura 1).

Segundo Pohl (2008), um dos arquitetos de referência para o projeto é Toyo Ito, conhecido por criar prédios extremamente conceituais, que misturam os mundos físico e virtual. Nesse sentido, a forma do Water Cube faz referência ao próprio uso da edificação, um centro aquático, e para isso se apropria do conceito de preencher a edificação com água, combinando forma e função através das bolhas de sabão (Zou; Leslie-Carter, 2010).

Chris Bosse, um dos arquitetos do grupo responsável pelo design do Water Cube, cita

Frei Otto e Buckminster Fuller como duas das suas principais influências, por explorarem uma relação entre natureza e arquitetura, desencadeando estruturas baseadas em formas naturais (Pohl, 2008). Então, enquanto o uso de formas poliédricas para representar as bolhas aproxima o conceito do Water Cube com os domos facetados de Fuller, o conceito de minimizar a área de superfície aponta uma proximidade com a arquitetura de Otto, cujas tendas surgem da observação das películas de sabão (Pohl, 2008).

O envoltório retangular está associado com a cultura local, que segundo Zou e Leslie-Carter (2010), relaciona formas quadradas (Water Cube) com a terra e formas circulares (Bird's Nest) com o paraíso. Plateau também relacionou cada um de seus sólidos com um elemento, atribuindo o cubo ao elemento terra devido à sua estabilidade (Cromwell, 1997). Além disso, o quadrado, na cultura chinesa, é utilizado como geometria primária para as cidades, palácios e casas (Pohl, 2008). Utilizar tal forma junto à planta do Water Cube aproxima a população, promovendo um pertencimento ao lugar a partir da identificação de figuras geométricas.

Adotar a estrutura baseada na bolha de sabão, segundo os engenheiros e arquitetos responsáveis pelo projeto, é uma alternativa repetitiva e edificável, ao mesmo tempo em que aparenta ser uma forma orgânica e aleatória (Arup, 2022). Essa percepção de complexidade, segundo Araújo e Celani (2016), é de interesse dos projetistas, mas que buscam ao mesmo tempo uma solução relativamente simples de entender, calcular e construir. Nesse sentido, o Water Cube é um projeto que aparenta complexidade em sua geometria, mas que está relacionado com uma estrutura e lógica simples - a bolha de sabão e sua repetição.

Isso permite que o projeto tenha uma solução que diverge da abordagem estrutural tradicional (Senses, 2007). Nos métodos tradicionais, o projeto estrutural não é desenvolvido em conjunto com o arquitetônico, existe uma separação entre tais soluções, que acabam limitando o próprio projeto arquitetônico. Em contrapartida, o Water Cube apresenta uma estrutura que é integrante do projeto arquitetônico, funcionando da mesma maneira que as estruturas da natureza, cujo objeto é a própria estrutura (Senses, 2007). Para a autora, a estrutura é um elemento único (não há divisão dos elementos em colunas, vigas e lajes), fazendo com que o sentido das forças esteja relacionado apenas com a posição de cada elemento metálico na estrutura. Aqueles situados na cobertura transmitem a carga horizontalmente, enquanto os elementos da parede transmitem verticalmente.

Sua estrutura passa por um processo de otimização em diversas etapas do desenvolvimento do projeto. Primeiro, uma estrutura mais robusta para as paredes do que para a cobertura, reforçando a estrutura das paredes e reduzindo os níveis de tensão de seus elementos quando comparados com a cobertura (Senses, 2007). Depois a redução da seção das barras metálicas, para diminuir o peso da estrutura (Senses, 2007). E uma otimização geométrica para diminuir as tensões de flexão dos membros estruturais em função da intensa atividade sísmica local (Senses, 2007). Apesar de parecer frágil, Arup (2022) afirma que o Water Cube é capaz de suportar as condições sísmicas de Pequim, considerando-o como a estrutura mais resistente à terremotos (sismos) no mundo. Ela possui 22 mil barras metálicas e 12 mil nós de conexão (Zou; Leslie-Carter, 2010). Segundo Senses (2007), o módulo adotado na repetição é o conjunto de bolhas baseado no modelo físico-matemático mais eficiente de divisão do espaço em células de volumes iguais, o Weaire-Phelan.

#### **4. O Histórico da Estrutura Geométrica da Bolha de Sabão**

Definir a forma das bolhas é um problema matemático formulado por Lagrange, em 1760, que buscava encontrar a menor área de superfície para um determinado contorno (Carmo, 1987).

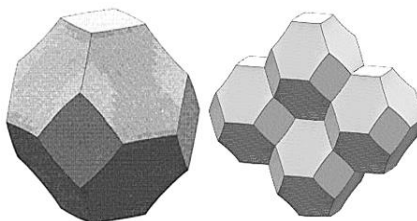


A estrutura resultante da espuma é relacionada com sua energia superficial, assumindo formas para minimizar sua área (Weaire; Aste, 2008). E, assim como os demais sistemas da natureza que se organizam em um arranjo (como as células), os autores acreditam que a similaridade com os poliedros esteja relacionada com sua capacidade geométrica de preencher o espaço.

Joseph Plateau, considerado o pioneiro na pesquisa, definiu o comportamento do agrupamento de bolhas de sabão (Senses, 2007). Baseado em suas observações, em 1873, estabeleceu três leis de comportamento das bolhas (Pohl, 2008). As duas primeiras definem que os ângulos de encontro entre bolhas são de  $120^\circ$  para a película de sabão (a própria bolha) e  $109,47^\circ$  (ângulo do tetraedro) nos encontros dos vértices. Weaire e Aste (2008) comentam que esses ângulos são uma consequência da minimização energética da estrutura. A terceira lei estabelece que as bolhas de sabão são sempre curvas devido à diferença de pressão entre elas (Weaire; Aste, 2008). Nesse sentido, as arestas das células que representam as bolhas de sabão também devem se apresentar levemente curvadas.

Apesar de as leis de Plateau serem aplicadas a qualquer espuma em equilíbrio, elas não definem a estrutura geométrica que melhor representa as bolhas (Weaire; Aste, 2008). Isso porque o físico baseava seu método na observação e deixava a comprovação e justificativa das suas teorias para outros pesquisadores. É somente com Lord Kelvin (Sir William Thomson), em 1887, que existe um modelo geométrico tridimensional das bolhas de sabão (Figura 2). Sua proposta é tão fiel às leis geométricas das bolhas de sabão que Weaire e Phelan (1994) consideram o desenvolvimento deste modelo como um desenho das observações de Plateau. Segundo Weaire e Aste (2008), este modelo poderia ser descrito como uma forma modificada do octaedro truncado, mas que Kelvin o chamava de “tetrakaidecahedron”. Embora o termo seja atribuído à célula de Kelvin, ele é considerado uma variação da escrita de “tetradecahedron” (tetradecaedro) que, segundo Weisstein (c2022a), são os sólidos que apresentam 14 faces, independente das geometrias das suas faces.

**Figura 2: Tetradecaedro de Kelvin e seu modelo de agrupamento da bolha de sabão.**



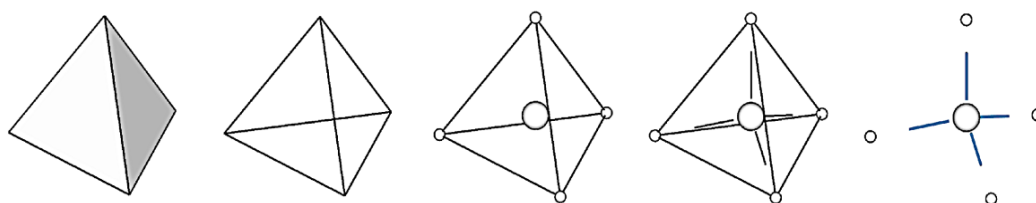
Fonte: Senses (2007).

Para Weaire e Aste (2008), não há dúvidas de que a geometria proposta por Kelvin seja a solução correta, se considerar que as bolhas restritas a uma única forma e a uma orientação constante. Segundo os autores, a cautela sobre essa geometria ocorre quando percebem que, na natureza, as bolhas têm mais liberdade do que o proposto no modelo de Kelvin. Então, Weaire e Phelan (1994) estudam novas possibilidades, para além de uma solução geométrica, mas que também aumente a eficiência da superfície, por meio da proporção entre área e volume. Para isso, buscam uma referência na natureza que se assemelhe à forma desenvolvida por Kelvin (Weaire; Aste, 2008). Com isso, Weaire e Phelan investigam componentes químicos chamados de clatratos, estruturas cristalinas formadas pelo conjunto de um elemento e que assume uma função de gaiola, envolvendo um átomo ou molécula específica. Exploraram sua geometria e inserem o modelo mais simples - que mescla células de 12 e 14 faces em conjunto

- no software de modelagem de líquidos disponível na época (Evolver).

Esse primeiro experimento foi imediatamente superior ao modelo proposto por Kelvin, apresentando 0.3% menos área (Weaire; Aste, 2008). O modelo em questão surge a partir da estrutura periódica  $\text{Na}_8\text{Si}_46$  (Weaire; Phelan, 1994), formado a partir dos átomos de silício (Si) que envolvem os átomos de sódio (Na). Nessa estrutura, os átomos de silício se conectam por meio de ligações tetraédricas (Figura 3) e envolvem os átomos de sódio (Weaire; Phelan, 1994). Ou seja, os átomos de silício possuem ligações com outros quatro átomos de silício.

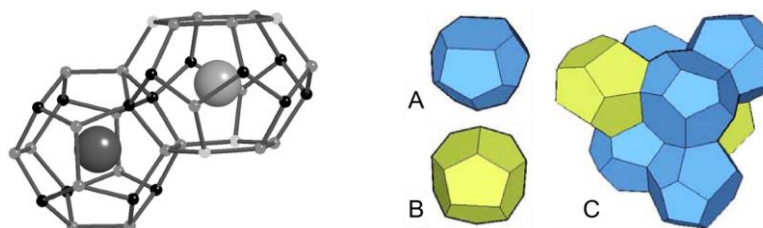
**Figura 3: Estrutura geométrica das ligações tetraédricas.**



Fonte: Elaborado pelos autores.

A estrutura mínima do composto apresenta duas estruturas diferentes (Figura 4 à esquerda) que, embora variem as formas e os números de faces, possuem volumes idênticos (Pohl, 2008). Consequentemente, Weaire e Phelan combinam essas duas geometrias para configurar seu modelo de espuma (Figura 4 à direita). O primeiro é um tipo de tetrakaidecaedro, poliedro formado por 14 faces, sendo duas hexagonais (e planas) e doze faces pentagonais não planas (em azul). O segundo é um dodecaedro pentagonal irregular, um poliedro de 12 faces, composto por pentágonos não planos (em amarelo). O módulo da espuma, ou seja, o conjunto de poliedros em que é aplicada a repetição, é o agrupamento formado por 8 bolhas, sendo dois dodecaedros e seis tetradecaedros (Weaire; Phelan, 1994).

**Figura 4: Estrutura mínima do composto  $\text{Na}_8\text{Si}_46$ , sua simplificação geométrica (sólidos A e B) e o agrupamento dessa geometria na espuma de WP (C).**



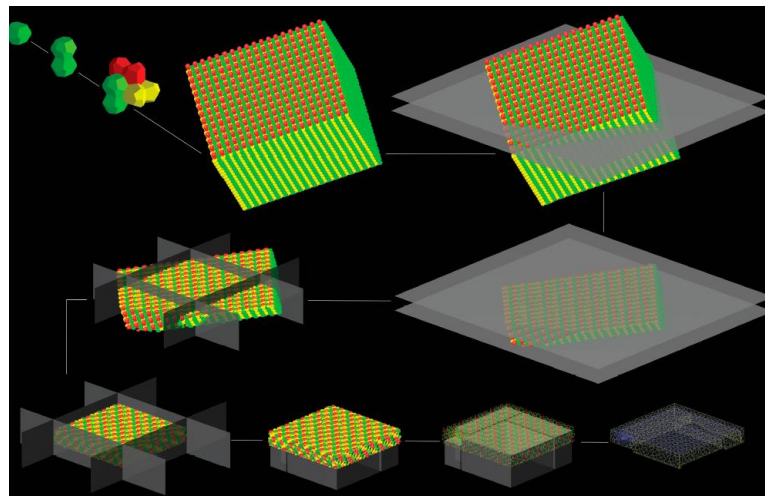
Fonte: Perottoni e da Jornada (2001) à esquerda e Senses (2007) à direita.

As arestas presentes nos modelos geométricos de bolhas de sabão de Weaire-Phelan são levemente curvadas, devido à diferença de pressão no interior e exterior da célula e, dessa forma, os pesquisadores encontram uma maior eficiência na razão da área e volume das unidades. Porém, Senses (2007) considera essa curvatura insignificante para o estudo e inconveniente para aplicação em estruturas espaciais. Então, sua baixa curvatura faz com que sejam imperceptíveis ou apenas desconsideradas nos modelos tridimensionais.

## 5. A geometria do projeto Water Cube

Senses (2007) busca compreender a estrutura por trás da aparência aparentemente complicada e aleatória do Water Cube. Com base no processo ilustrado pelo escritório responsável pelo projeto (Figura 5), estuda a transição do modelo de espuma (teórico) para uma estrutura arquitetônica de grande escala. O processo ocorre inicialmente a partir da definição das células de bolha de sabão, seu conjunto que define a espuma de WP e a combinação de centenas dessas estruturas.

Figura 5: Processo de criação da geometria do Water Cube.



Fonte: Arup+CSCEC+PTW (Pohl, 2008).

Como não se encontrou na literatura a quantidade de vezes que o modelo é repetido, identificou-se a partir da imagem disponibilizada pelo escritório responsável pelo projeto. Observa-se a 19 unidades do modelo em cada direção, aproximando de um cubo (19x19x19).

Segundo Pohl (2008), o modelo de espuma de Weaire-Phelan, apesar da completa regularidade na repetição dos elementos, seu conjunto no projeto Water Cube pode ser percebido como aleatório e orgânico quando visto de um ângulo arbitrário. Devido a esta propriedade, esse grande agrupamento é rotado em duas direções, o que faz o modelo perder o alinhamento com os eixos de referência e garante a percepção de aleatoriedade à forma. Por fim, a geometria é cortada a partir de um prisma de base quadrada de 177x177x31m, restringindo as bolhas a uma figura com referência à cultura local. Embora essas transformações nas bolhas resultem em uma aparência aleatória, Senses (2007) afirma ser possível perceber a repetição da geometria, quando se observa detalhadamente a fachada.

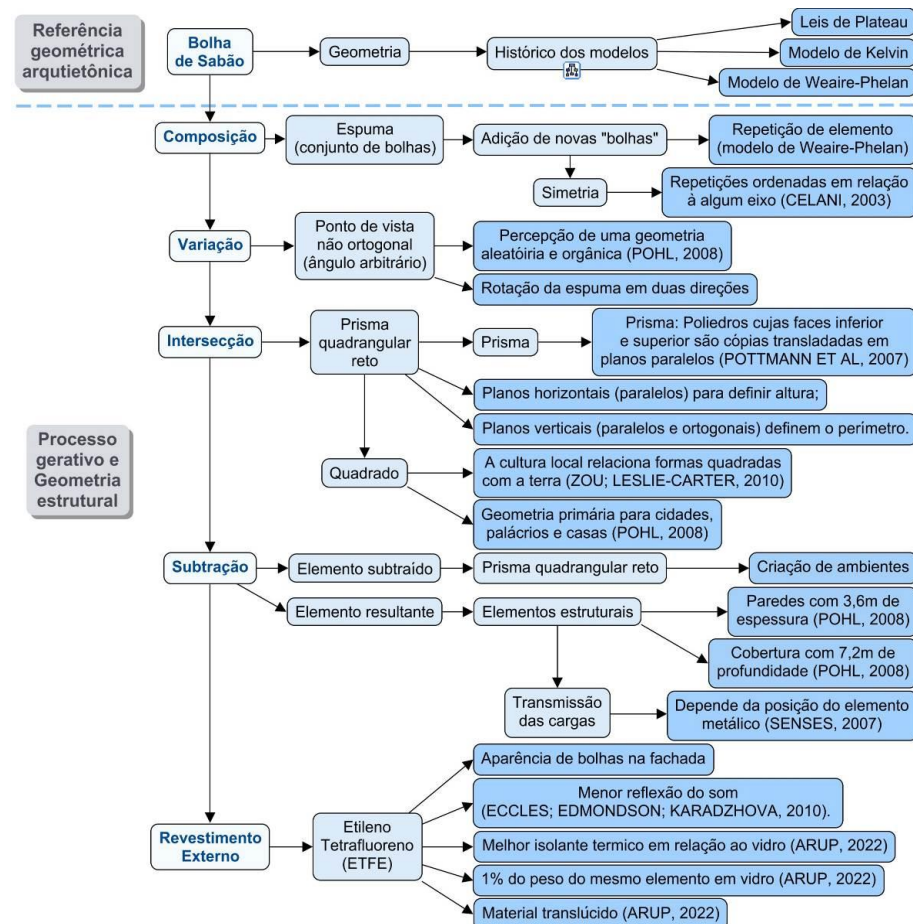
Por fim, o revestimento das fachadas do Water Cube é de etileno tetrafluoroetileno (ETFE), inicialmente escolhido como alternativa ao vidro devido à sua menor reflexão sonora (Eccles; Edmondson; Karadzhova, 2010). No entanto, suas vantagens vão além das questões acústicas, pois esse material pesa apenas 1% do peso do vidro e é um isolante térmico mais eficiente (Arup, 2022). O ETFE é translúcido, o que permite a entrada de luz solar e reduz o consumo de energia elétrica, e também é um material autolimpante, já que a chuva que incide sobre o revestimento é capaz de limpá-lo (Arup, 2022).



## 6. A Estrutura de Saber do Water Cube

A partir dos conceitos presentes nos discursos analisados até então, configura-se uma estrutura (Figura 6) que caracteriza a obra em seus aspectos geométricos e arquitetônicos. Na direção vertical explicitam-se as transformações geométricas aplicadas para gerar a forma do Water Cube; em cada linha do esquema (no sentido horizontal) são especificados os conceitos presentes e relacionados com as justificativas para sua implementação.

Figura 6: Esquema teórico do Water Cube.

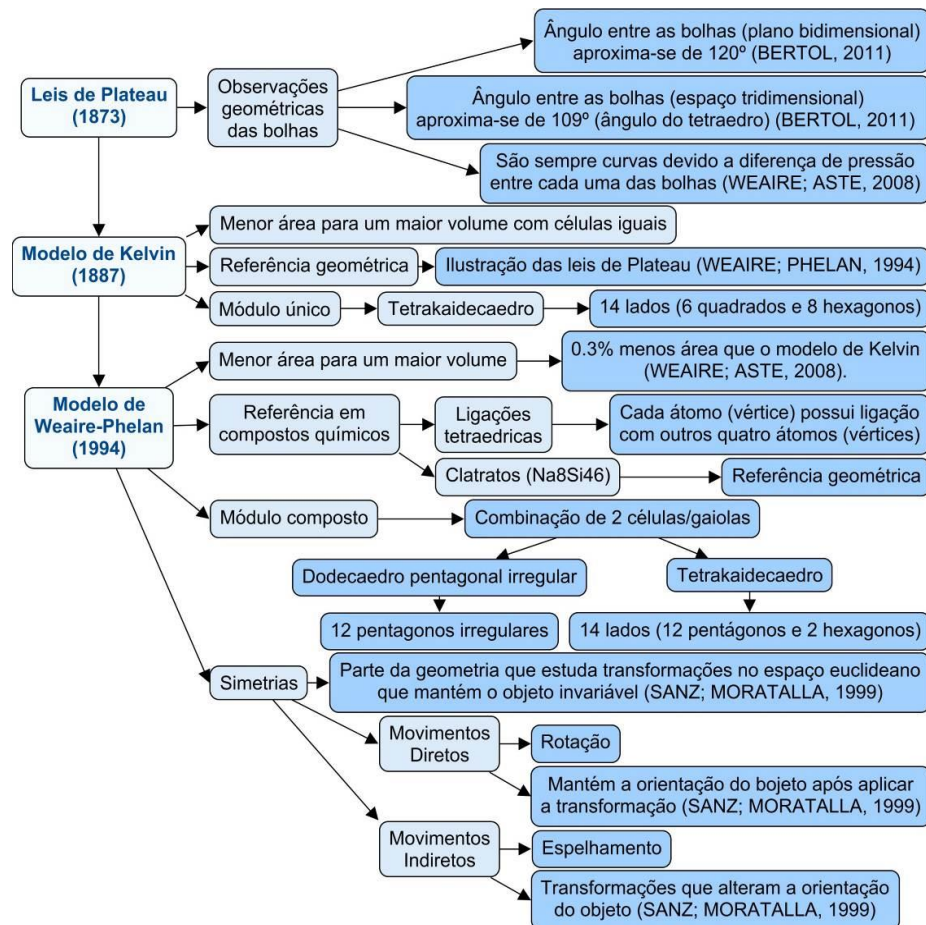


Fonte: Elaborado pelos autores.

A partir da revisão teórica, constatou-se que o projeto Water Cube está fundamentado em uma estrutura de saber geométrica intrinsecamente associada aos modelos de bolhas. Então, em outro esquema (Figura 7), busca-se explicitar o saber referente ao histórico dos modelos de bolha de sabão (em branco), a partir dos conceitos que os explicam e os justificam (em azul claro) e a base geométrica de tais modelos (em azul mais forte).

Embora alguns autores tenham tentado explicitar a geometria das bolhas de sabão, é apenas com a abordagem de Weaire-Phelan que o modelo geométrico assume sua forma mais otimizada, por isso é adotado no Water Cube. Seu histórico, que inclui o atendimento às leis geométricas de Plateau e sua origem na química (geometria dos cristais de  $\text{Na}_8\text{Si}_4\text{I}_6$ ), foi importante para reconhecer a estrutura geométrica da espuma de WP.

Figura 7: Esquema teórico sobre modelos de bolha de sabão.



Fonte: Elaborado pelos autores.

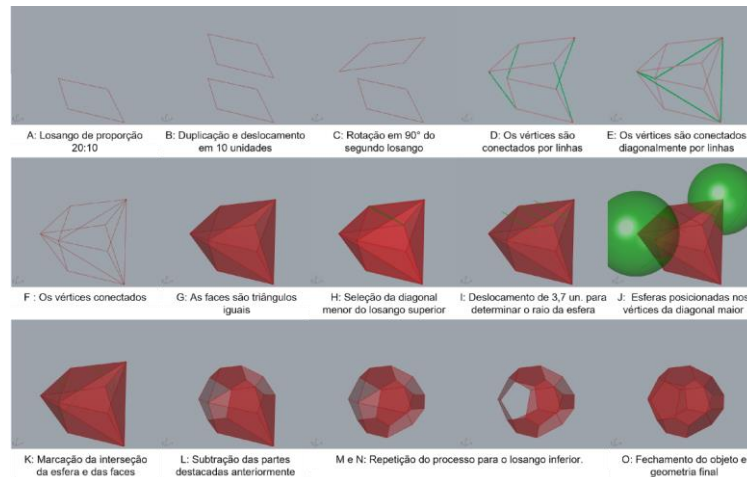
Uma maneira de obter essa espuma é por meio da modelagem de superfícies líquidas, utilizando o programa "Surface Evolver" (Senses, 2007). Porém, envolve campos de conhecimento que vão além da área da arquitetura, como a física do comportamento dos líquidos. Então, embora Weaire e Phelan tenham obtido as geometrias de seu modelo dessa maneira, essa alternativa foge da proposta deste trabalho, que se concentra no ensino de geometria para arquitetura e sua correlação com aplicações da modelagem paramétrica.

A segunda maneira é desenvolvida a partir da lógica apresentada por Elkader e El Gendy (2016), a qual tem por base processos de modelagem de polígonos, linhas, faces e transformações geométricas (Figura 8). Inicia pela construção de um losango (Figura 8 A) e transformações aplicadas a esse polígono, tais como translação e rotação (Figura 8 B e C), que resultam em dois losangos; na sequência os vértices dos dois polígonos são conectados por linhas (Figura 8 D e E) para definir a geometria do conjunto de faces e suas superfícies (Figura 8 G); depois, transformações de intersecção e subtração são aplicadas nessas superfícies (Figura 8 J, K, L, M e N), para a obtenção da geometria final. Com isso, o resultado final é o modelo do tetrakaidecaedro (Figura 8 O).

Entretanto, Elkader e El Gendy (2016) não demonstram a modelagem do segundo poliedro utilizado no modelo de Weaire-Phelan e apresentam uma complexidade para o contexto didático que a pesquisa objetiva abordar. Isso envolve a quantidade de etapas

necessárias e os tipos de transformações geométricas envolvidas na construção do sólido. Como resultado, foi necessário buscar outra alternativa para as células da estrutura utilizada.

**Figura 8: Modelagem do tetrakaidecaedro a partir da construção e transformação de um sólido.**

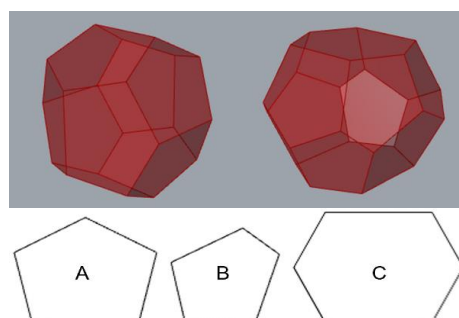


Fonte: Elaboração própria a partir de Elkader e El Gendy (2016).

Senses (2007) gera o modelo dos poliedros a partir de seus vértices. Segundo a autora, por apresentar um modelo sólido no final, essa técnica é a opção mais racional e precisa para o processo. Isso porque as operações digitais de seções são demasiadamente mais fáceis em sólidos do que em estruturas geométricas formadas apenas por linhas e/ou superfícies. Ao analisar esta técnica, foi constatado que o processo é mecânico e envolve repetições de ações que não podem ser automatizadas, pois é necessário definir manualmente as coordenadas X, Y e Z para cada um dos 44 vértices (20 do dodecaedro irregular e 24 do tetrakaidecaedro). No entanto, ao adotar esse método como um exercício de modelagem, foi possível obter os dois poliedros e verificar que o tetrakaidecaedro corresponde ao obtido a partir de Elkader e El Gendy (2016). A Figura 9 ilustra as geometrias resultantes dessas programações.

Após a modelagem das células base do modelo de Weaire-Phelan, busca-se compreender o processo de composição subjacente a cada um dos poliedros. Parte-se para uma análise geométrica, começando pela repetição dos diferentes tipos de polígonos que formam as faces (Figura 9).

**Figura 9: Dodecaedro (linha superior à esquerda) e Tetrakaidecaedro (linha superior à direita). Na linha inferior as faces pentagonais (A e B) e hexagonal (C) dos poliedros.**

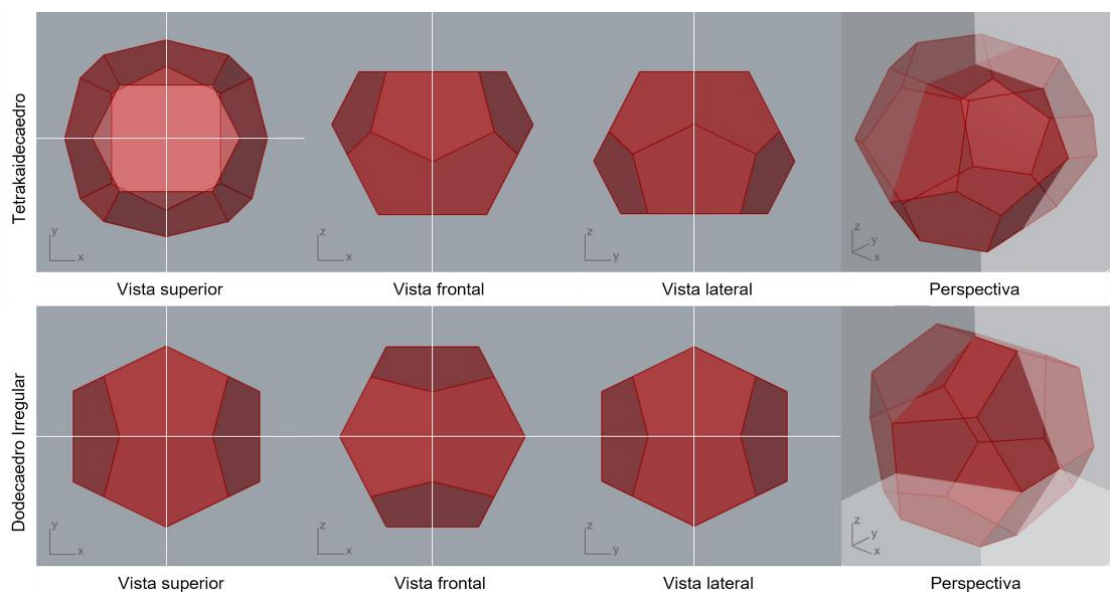


Fonte: Elaborado pelos autores.

O tetrakaidecaedro combina faces pentagonais (A e B) e hexagonais (C), enquanto o dodecaedro irregular é constituído apenas pelo pentágono irregular (A), presente em ambos os poliedros. Segundo Mitchell (1990), a simetria é um grupo de transformações geométricas (translações, rotações, reflexões e composições dessas) que transformam a composição nela mesma. Em outras palavras, a simetria é uma propriedade de manter-se constante sob certas transformações (Weisstein, c2022b; Sanz; Moratalla, 1999). Nos poliedros aqui analisados, a presença de simetria se caracteriza na repetição de suas faces por meio simetria bilateral em diversas projeções, incluindo vista superior, frontal e lateral, como observado tanto no tetrakaidecaedro quanto no dodecaedro irregular (Figura 10).

De acordo com o conceito de Cromwell (1997), o tetrakaidecaedro tem dois planos verticais de espelhamento, cuja interseção define um eixo de rotação (na vista superior), cujo ângulo necessário para atingir a simetria é de  $180^\circ$ . Por outro lado, o dodecaedro irregular possui dois planos de espelhamento vertical e um plano horizontal, resultando em uma maior quantidade de interseções de planos e, portanto, um maior número de eixos de rotação.

**Figura 10: Planos de simetria de reflexão bilateral dos poliedros.**

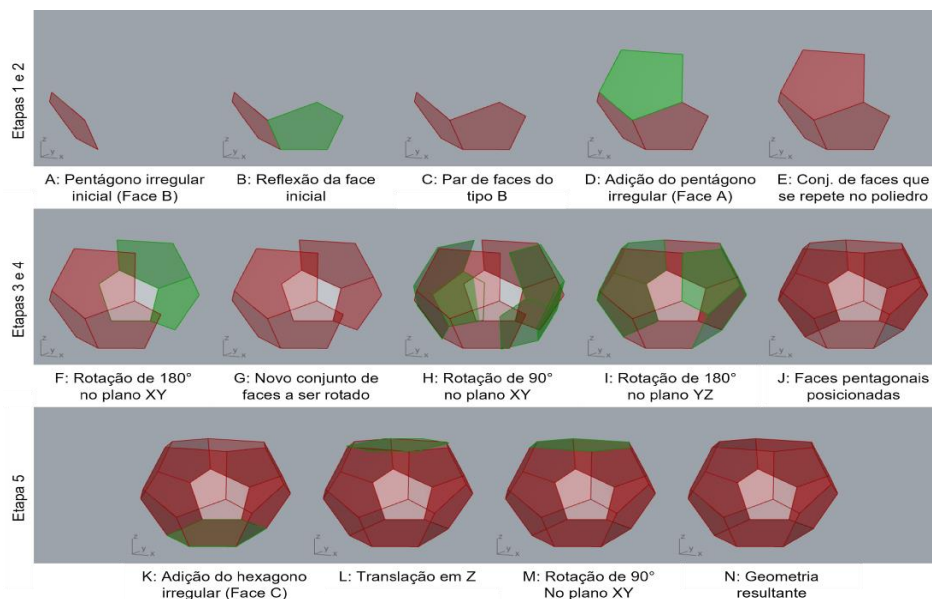


Fonte: Elaborado pelos autores.

Com base no reconhecimento de simetrias nos poliedros, foi desenvolvido um quarto processo de modelagem das bolhas de Weaire e Phelan, exclusivamente para esta pesquisa. A utilização de conceitos de transformações geométricas é justificada pelo seu potencial para otimizar o processo de modelagem e demonstrar como é possível estruturar formas complexas por meio de sua aplicação. O objetivo não é explorar o ambiente paramétrico para obter variações desse modelo, mas evidenciar as relações e transformações geométricas implícitas nele. Os esquemas visuais da Figura 11 e Figura 12 sistematizam, respectivamente, essas etapas de modelagem para o tetrakaidecaedro e para o dodecaedro irregular.

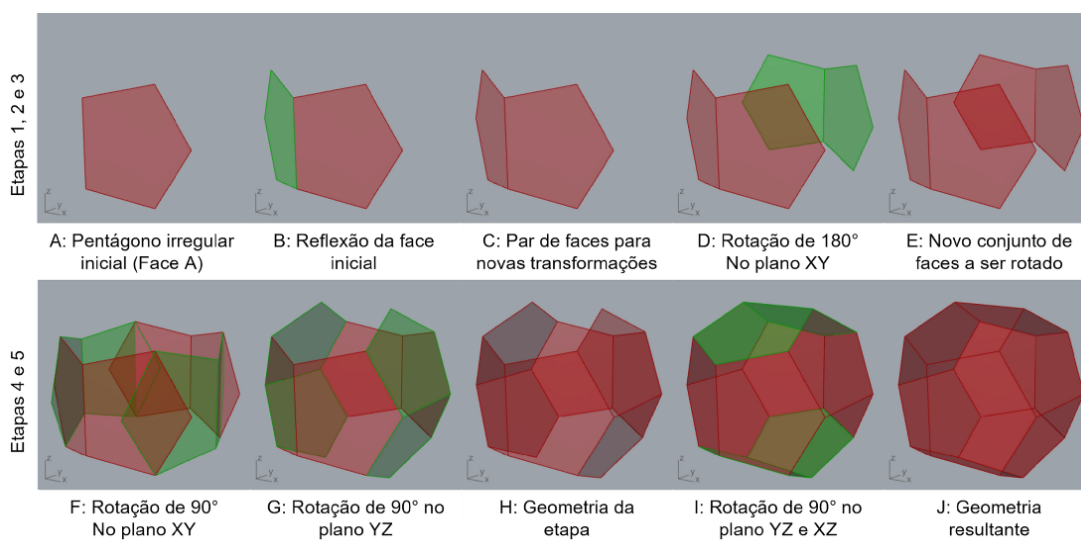


**Figura 11: Representação da modelagem do tetrakaidecaedro a partir das transformações geométricas.**



Fonte: Elaborado pelos autores.

**Figura 12: Representação da modelagem do dodecaedro a partir das transformações geométricas.**

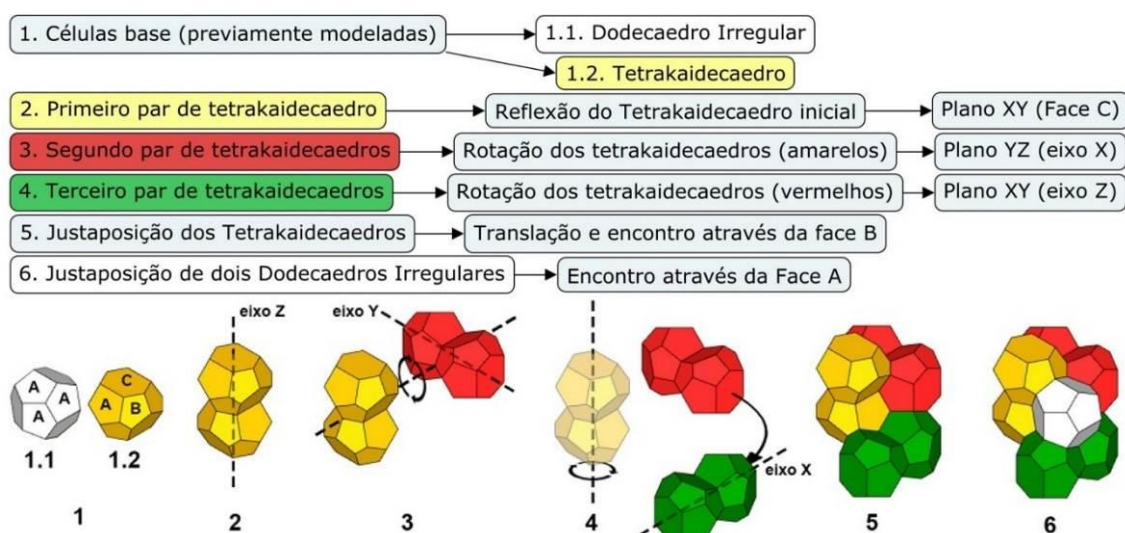


Fonte: Elaborado pelos autores.

A partir destes processos, obteve-se a modelagem das duas células que representam as bolhas de sabão de Weaire e Phelan. Isso permitiu investigar a lógica geométrica subjacente ao conjunto da espuma, uma vez que o modelo completo é configurado a partir do agrupamento de oito células. No entanto, não se encontraram estudos que explicitassem o posicionamento e as relações entre os poliedros para a obtenção de tal agrupamento, por isso foi necessário desenvolver um processo ao mesmo tempo analítico e exploratório a partir de aplicação de diversas transformações geométricas, conforme as etapas ilustradas na Figura 13.



**Figura 13: Esquema síntese das etapas para a geração do modelo de Weaire-Phelan.**



Fonte: Elaborado pelos autores.

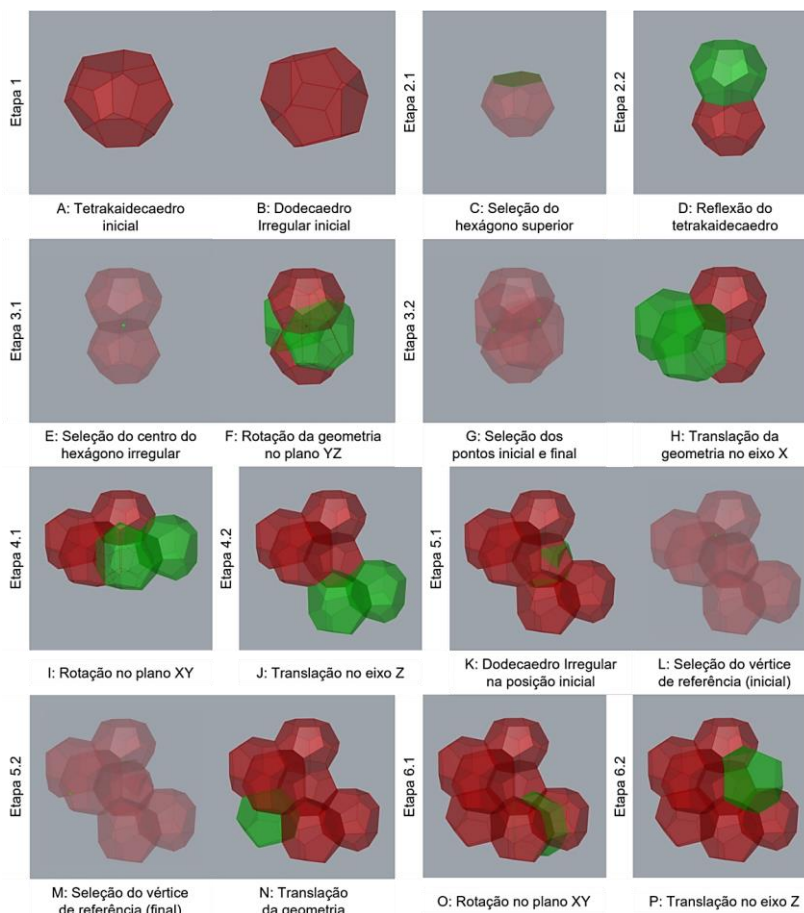
Inicialmente, foi essencial observar as faces que compõem os dois poliedros (etapa 1). A face com menor ocorrência é o hexágono irregular (face C), que só está presente no tetrakaidecaedro. E isso conduz a sobreposição do poliedro (etapa 2), por meio do seu espelhamento (reflexão), como único encaixe possível para a face.

A principal dificuldade na criação deste modelo de espuma é garantir a sua periodicidade, ou seja, a capacidade de se repetir infinitamente. Então, não é possível continuar a construção do modelo apenas com a reflexão, sendo necessário outras transformações geométricas que permitam a justaposição de suas faces, como rotações dos poliedros. Na etapa 3, as células amarelas são rotadas em  $90^\circ$  no plano YZ (eixo X), resultando em um segundo par de tetrakaidecaedros (em vermelho). Na etapa 4, são definidos os poliedros verdes, por meio da rotação de  $90^\circ$  no plano XY (eixo Z) das células vermelhas.

Conseqüentemente, cada par de tetrakaidecaedros (amarelo, vermelho e verde) está posicionado em um dos eixos do plano cartesiano (X, Y, Z). A face possível de se encaixar entre os pares de poliedros (etapa 5) é o pentágono irregular menor (face B), presente apenas no tetrakaidecaedro. Por fim, na etapa 6, são encaixados os dodecaedros irregulares através da face A, que é a face semelhante entre os dois diferentes tipos de poliedros.

Depois, o esquema anterior é transposto para o ambiente de modelagem paramétrica, a fim de evidenciar cada transformação presente na geometria, detalhando cada etapa desse processo. A sequência de imagens (Figura 14) ilustra o resultado de cada etapa da modelagem. Na etapa 1 tem-se as células iniciais: o tetrakaidecaedro (A) e o dodecaedro irregular (B). A etapa 2 (C e D) é a reflexão do tetrakaidecaedro. A etapa 3 (E, F, G e H) é a rotação e translação do segundo par de tetrakaidecaedros. Enquanto a etapa 4 (I e J) é esse mesmo processo para o terceiro par de tetrakaidecaedros. Já as etapas 5 (K, L, M e N) e 6 (O e P) tem essas mesmas transformações para posicionar cada um dos dodecaedros irregulares.

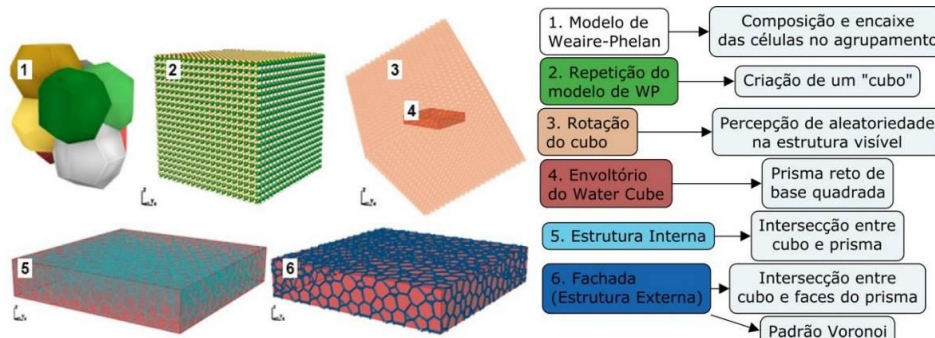
Figura 14: Representação gráfica do modelo de WP.



Fonte: Elaborado pelos autores.

A partir do modelo de Weaire-Phelan (Figura 14 P) é possível avançar para a modelagem do Water Cube. Com base na abordagem de Senses (2007), Pohl (2008) e Zou e Leslie-Carter (2010), estrutura-se um esquema que busca representar o algoritmo síntese do projeto, ilustrado na Figura 15. Nele são abordadas as ideias principais subjacentes ao projeto e que, na sequência, serão especificadas e explicitadas a partir da programação visual.

Figura 15: Esquema síntese do algoritmo e suas etapas para a geração da forma do Water Cube.

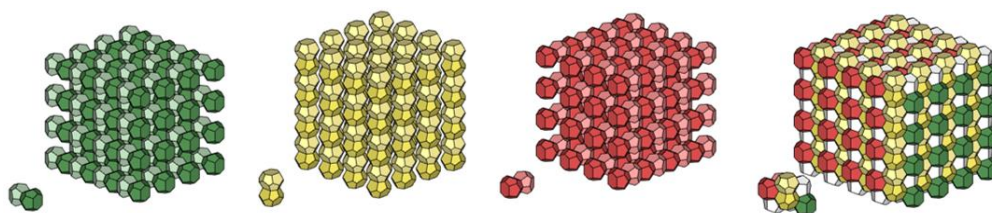


Fonte: Elaborado pelos autores.

A etapa 1, é relativa à geração da geometria da espuma, já foi apresentada anteriormente. A partir da etapa 2, estão descritas as transformações geométricas que originaram o projeto do Water Cube.

Como o modelo de WP foi criado visando repetição e encaixe das faces dos poliedros, essa lógica se mantém na repetição da espuma. A construção da unidade permite que cada lado do modelo de espuma encontre as faces semelhantes no seu lado oposto, possibilitando a conexão de novas estruturas similares e encaixando-as em si mesmo. Essas conexões ocorrem em todos os elementos abordados no processo de construção do modelo de WP, continuamente para cada par de tetrakaidecaedro (amarelo, vermelho e verde) (Figura 16).

**Figura 16: Repetição dos tetrakaidecaedros em cada um dos eixos separadamente e em conjunto.**



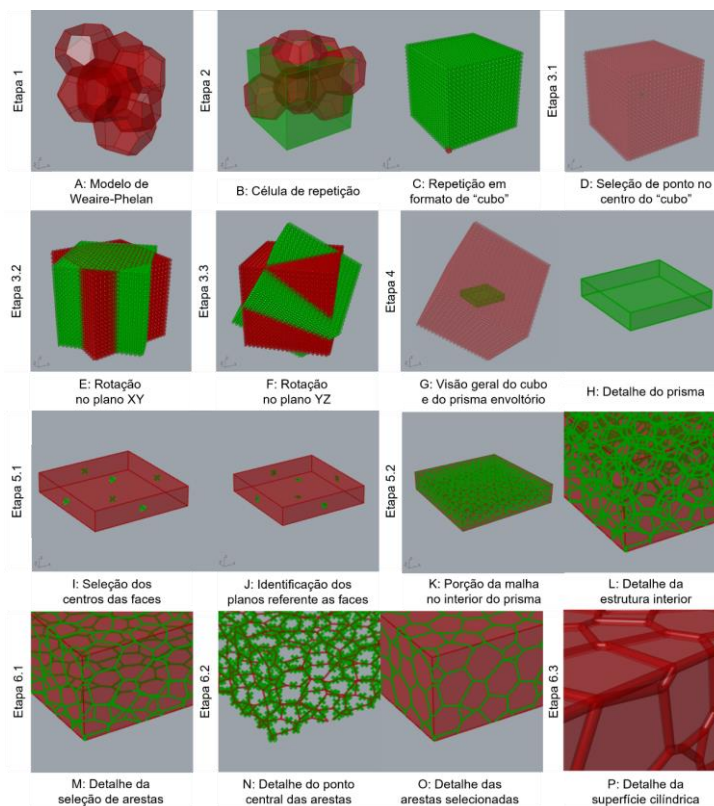
Fonte: Elaborado pelos autores.

Na composição do modelo, essa propriedade de repetição é definida por meio da translação de 19 unidades de espuma em cada direção, formando um “cubo” (etapa 2, Figura 15). Em seguida, na etapa 3 da Figura 15, o conjunto de bolhas passa por uma série de transformações que garantem a percepção de aleatoriedade para a geometria final. Ou seja, o cubo é rotado em dois eixos distintos para que a repetição da geometria não seja tão evidente. Depois, há a definição de um prisma reto de base quadrada como o envoltório do Water Cube (etapa 4, Figura 15), bem como a sua intersecção com o conjunto de bolhas rotado (etapa 5, Figura 15). Externamente, a intersecção da estrutura com as faces do prisma define um padrão na edificação, conhecido como diagrama de Voronoi (etapa 6, Figura 15).

Novamente há a transposição do esquema para o ambiente de modelagem paramétrica, explicitando-se as transformações geométricas em cada etapa do processo. A Figura 17 é referente às etapas do modelo geométrico do projeto do Water Cube. A primeira etapa (A) representa a geometria inicial do projeto, o modelo de Weaire-Phelan. A etapa 2 (B e C) é a repetição do modelo para construção do cubo. Já a etapa 3 (D, E e F) são os processos de rotação do modelo. A etapa 4 (G e H) é a definição do prisma envoltório. A etapa 5 (I, J, K e L) é a intersecção entre o cubo e o prisma, definindo a estrutura interna do Water Cube. E a etapa 6 (M, N, O e P) é a seleção e demarcação da estrutura metálica da fachada.

Segundo Senses (2007), o processo original ocorre a partir de modelos sólidos (poliedros) e somente depois de definida a forma da edificação é que a malha é aplicada para otimizar a estrutura. Nesse sentido, o conjunto de sólidos é transformado em uma malha, sendo as faces dos poliedros utilizadas como as faces da malha. Dessa forma, considera-se a tesselação no projeto, uma vez que a malha é aplicada em uma geometria existente.

Figura 17: Representação gráfica do modelo do Water Cube.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Porém, o emprego da malha no processo de modelagem desenvolvido para esse trabalho ocorreu em um momento anterior. Depois de definido o modelo de Weaire-Phelan, este é gerado como um sólido e convertido em malha. Essa antecipação da tesselação foi feita para simplificar e reduzir a quantidade de polígonos do modelo, com o propósito de facilitar o processamento computacional. Pois o tipo de modelo (sólido) presente no software adotado é configurado por faces triangulares, o que aumenta consideravelmente a quantidade de polígonos. Quando se aplica uma malha por meio do plugin Ngon, a malha construída passa a ter faces mais complexas (com pentágonos ou hexágonos), mas em menor número, otimizando o processamento computacional.

## 7. Resultados

O processo gerativo e a geometria estrutural do Water Cube foram definidos em conjunto, integrando o projeto arquitetônico e estrutural. Enquanto outros projetos estudados na pesquisa - Biosfera de Montreal (Zauk; Pires, 2023b) e Projeto Éden (Zauk; Pires, 2023c) - concentram-se no comportamento das bolhas e limitam sua estrutura às leis geométricas de Plateau, o projeto do Water Cube avança no estudo da geometria dessas bolhas e utiliza o modelo geométrico mais atual, o conjunto de Weaire-Phelan. Outra questão é a aparente transformação da geometria identificada no envoltório. Essa variação é percebida pela rotação dos elementos (espuma), permitindo uma interpretação de aleatoriedade dos elementos na fachada. Então, mesmo com um ambiente controlado e elementos repetitivos, o envoltório é interpretado como um conjunto de elementos aleatórios.



Devido à complexidade do conceito e da geometria adotada, todas as etapas (projeto, análise, simulação e também aquelas relacionadas com a fabricação e montagem) ocorreram originalmente por meios digitais. Nesse sentido, identificou-se que o processo gerativo e, por consequência, o de modelagem do Water Cube estão intimamente relacionados ao uso de malhas para otimização. Isso porque a geometria abordada no projeto original não poderia ser facilmente modelada com as tecnologias de representação disponíveis no contexto dessa pesquisa. Foi a partir da representação com malha que se viabilizou a modelagem da obra.

O processo gerativo e a geometria estrutural do Water Cube foram definidos em conjunto, integrando o projeto arquitetônico e estrutural. Isso possibilitou uma abordagem mais integral do saber, visto que não só buscou representar o processo original, mas adaptá-lo para o contexto de ensino desta pesquisa. Ao fazer isso, utilizou-se da geometria e das malhas como elementos importantes tanto para a compreensão como também para identificar essa estrutura do saber referente ao projeto analisado.

## **8. Considerações Finais**

Apesar de ter sua origem na matemática/geometria, a estrutura de saber é resultado de uma construção multidisciplinar. Tem sua base na sistematização do discurso dos responsáveis pelo projeto, que passa a ser complementado com materiais obtidos a partir de outros pesquisadores, a fim de explicitar os elementos que compõem essa estrutura. Sendo assim, a própria modelagem é um exercício que traduz concretamente estes elementos da estrutura de saber de um projeto, permitindo explicitar o que foi reconhecido na revisão de literatura.

Nesse processo, certas etapas – entre elas projeto, simulação, fabricação e montagem - são mais enfatizadas nos discursos dos arquitetos. Quando se acrescenta o exercício de modelagem paramétrica e sua explicitação da lógica construtiva, é possível demonstrar a integração do projeto, as relações e consequências entre cada uma das etapas. Então, mesmo quando a programação visual apresenta poucos parâmetros passíveis de variação, a abordagem paramétrica destaca as conexões entre os elementos do projeto. No entanto, as modificações em si não são o principal objetivo do uso do modelo paramétrico nesta pesquisa, o destaque está na exploração dessas relações que desencadeiam as modificações sequenciais, reforçando a importância da geometria no processo de projeto arquitetônico.

O estudo dirigido a este projeto reforça a importância da geometria que subsidia diversas soluções arquitetônicas. Nesse sentido, a interdisciplinaridade da arquitetura passa a ser destacada, porque há uma associação dos conceitos de geometria com os requisitos projetuais e até mesmo ambientais relacionados ao desempenho da arquitetura. Embora isso seja uma questão pertinente tanto à arquitetura analógica quanto à digital, é no ambiente paramétrico que as questões geométricas podem ser avaliadas em relação às suas propriedades e ao desempenho do projeto. E, com isso, destacam-se as questões de sustentabilidade, que passam a ser relacionadas com sua geometria final. Apesar do interesse dessa pesquisa no estudo de geometrias de projetos contemporâneos e referenciais, há o caráter didático do trabalho, a partir do momento que há a transposição do saber geométrico – identificado para a estrutura de saber – para o ensino. E isso ocorre por meio da representação, contribuindo para uma formação mais integrada e corresponsável.



## Referências

- ARUP. National Aquatics Center (Water Cube), 2022. Projects. Disponível em: <[www.arup.com/projects/chinese-national-aquatics-center/](http://www.arup.com/projects/chinese-national-aquatics-center/)>. Acesso em: 26 de out. de 2022.
- CARMO, M. P. **Superfícies Mínimas**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, 1987.
- CHEVALLARD, Y. El Análisis de las Prácticas Docentes en la Teoría Antropológica de Lo Didáctico. **Recherches en Didactique de Mathématiques**, Grenoble, v. 9, n. , p. 21-266, 1999.
- CROMWELL, Peter. **Polyhedra**. 1. ed. Reino Unido: Cambridge University Press, 1997. 476 p. ISBN 9-521-55432-2.
- ECCLES, Robert; EDMONDSON, Amy; KARADZHOVA, Dilyana. **Arup: Building the Water Cube**. Harvard Business School, Case 410-054, p. 21, 2010
- ELKADER, Morad Abd; EL GENDY, Marwa Abd Elkader. Mathematics behind the Cell Bubble Structure to Achieve Sustainability. **International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT)**, [s. l.], v. 5, ed. 7, p. 37-42, jul. 2016. DOI 10.17577/IJERTV5IS070053. Disponível em: <https://www.ijert.org/mathematics-behind-the-cell-bubble-structure-to-achieve-sustainability>. Acesso em: 7 dez. 2022.
- FLEISCHMANN, Moritz; AHLQUIST, Sean. Cylindrical Mesh Morphologies: Study of Computational Meshes based on Parameters of Force, Material, and Space for the Design of Tension-Active Structures. **Computation: The New Realm of Architectural Design** [27th eCAADe Conference Proceedings / ISBN 978-0-9541183-8-9] Istanbul, Turkey, 16-19 September 2009, pp. 39-46, 2009.
- HERNANDEZ, Carlos Roberto. Parametric Gaudi. SIGraDi 2004, **Proceedings of the 8th Iberoamerican Congress of Digital Graphics**, Porte Alegre, Brasil, 2004.
- JABI, Wassim; SOE, Shwe; THEOBALD, Peter; AISH, Robert; LANNON, Simon. Enhancing parametric design through non manifold topology. **Design Studies**, v. 52, 2017, p. 96-114, ISSN 0142-694X, DOI: 10.1016/j.destud.2017.04.003
- KLOOK. Beijing Tiananmen Square, The Forbidden City and Olympic Park Day Tour. c2022. Fotografia. Disponível em: <<https://www.klook.com/en-HK/activity/5860-tiananmen-square-forbidden-city-olympic-park-tour-beijing/>>. Acesso em: 21 nov. 2022.
- KOLAREVIC, Branko. **Architecture in the Digital Age: Design and Manufacturing**. New York: Taylor & Francis, 2005. 320 p. ISBN 0-415-27820-1
- LEOPOLD, Cornelia. Principles of a Geometry Program for Architecture: Experiences, Examples, and Evaluations. **Journal for Geometry and Graphics**, v.7, n.1, p.101-110, 2003. ISSN 1433-815
- LIMA, Fabio. A prática da tesselação: racionalização construtiva de painéis arquitetônicos complexos. **Arquitetura Revista**, [S. l.], v. 17, n. 1, pp. 01–16, 2021. DOI: 10.4013/arq.2021.171.01.
- LUO, Feng. Rigidity of polyhedral surfaces. **Journal of Differential Geometry**, Lehigh University, v. 96, n. 2, p. 241-302. 2014. DOI 10.4310/jdg/1393424919.
- MITCHELL, William J. **The logic of architecture: Design, Computation, and Cognition**. Cambridge, Mass: Mit Press, 1990. 292 p. ISBN 0262132389. Disponível em: [https://openlibrary.org/works/OL15277298W/The\\_logic\\_of\\_architecture?edition=key%3A/books/OL2049665M](https://openlibrary.org/works/OL15277298W/The_logic_of_architecture?edition=key%3A/books/OL2049665M). Acesso em: 20 dez. 2022.
- PAN, Qing; XU, Guoliang; XU, Gang; ZHANG, Yongjie. Isogeometric analysis based on extended Catmull–Clark subdivision. **Computers & Mathematics with Applications**, v.71, ed. 1, 2016, p. 105-119, ISSN 0898-1221, doi: 10.1016/j.camwa.2015.11.012.

- PEROTTONI, Claudio; DA JORNADA, João Alziro. The carbon analogues of type-I silicon clathrates. **Journal of Physics: Condensed Matter**, [s. l.], v. 13, n. 26, p. 5981-5998, 2001. DOI: 10.1088/0953-8984/13/26/313
- PIRES, J. F.; PEREIRA, A. T. C.; GONÇALVES, A. Taxonomias de geometria da arquitetura contemporânea: uma abordagem didática ao ensino da modelagem paramétrica na arquitetura. **Gestão e Tecnologia de Projetos**, São Carlos, v. 12, n. 3, p. 27-46 2017. DOI: 10.11606/gtp.v12i3.133954
- POHL, Ethel Baraona. **Watercube**: The Book. Espanha: Dpr editorial, 2008. 326 p. ISBN 978-84-612-4419-5. E-book (326p.).0.0114
- POTTMANN, Helmut; ASPERL, Andreas; HOFER, Michael; KILIAN, Axel. **Architectural Geometry**. 1. ed. Exton, Pa: Bentley Institute Press, 2007. 744 p. ISBN 978-0-934493-04-5.
- SANZ, M. A.; MORATALLA, A. **Simetria**. Serie Geometría y Arquitectura II, Cuadernos de Apoyo a la Docencia del Instituto Juan de Herrera. Madri: Publicaciones de la Escuela Superior de Arquitectura de Madrid, 1999.
- SENSES, Nilufer. **Foam Structures**: A comparative structural efficiency analysus based on the building case Watercube. Orientador: Margit Pfeiffer-Rudy. 2007. 78 p. Tese (Doutorado) - Departamento de Projeto Estrutural e Engenharia Madeireira, TU Vienna, 2007.
- SHIMADA, Kenji; GOSSARD, David. Automatic triangular mesh generation of trimmed parametric surfaces for finite element analysis. **Computer Aided Geometric Design**, v.15, ed.3, 199–222. 1998. DOI: 10.1016/S0167-8396(97)00037-X
- WEAIRE, Denis; ASTE, Tomaso. **The Pursuit of Perfect Packing**. 2. ed. Boca Raton: Taylor & Francis, 2008. 216 p. ISBN 9780429138645. DOI: 10.1201/9781420068184
- WEAIRE, Denis; PHELAN, Robert. A counter-example to Kelvin's conjecture on minimal surfaces. **Philosophical Magazine Letters**, v. 69, ed. 2, p. 107-110, 1994. DOI: 10.1080/09500839408241577
- WEISSTEIN, Eric. Tetradecahedron. From MathWorld-A Wolfram Web Resource. c2022a. Disponível em: <mathworld.wolfram.com/Tetradecahedron.html>. Acesso em: 22 nov. 2022.
- WEISSTEIN, Eric. Symmetry. From MathWorld--A Wolfram Web Resource. c2022b. Disponível em: <https://mathworld.wolfram.com/Symmetry.html>. Acesso em: 20 dez. 2022.
- ZOU, Patrick; LESLIE-CARTER, Rob. Lessons Learned from Managing the Design of the 'Water Cube' National Swimming Centre for the Beijing 2008 Olympic Games. **Architectural Engineering and Design Management**, v. 6, ed. 3, p. 175-188, 2010. DOI: http://dx.doi.org/10.3763/aedm.2010.0114
- ZAUK, Fernando Franz. **Malhas em projetos paramétricos com superfícies complexas**: Um repertório formativo para arquitetura. Orientador: Janice de Freitas Pires. 2023. 245 p. Dissertação (Mestrado em Arquitetura e Urbanismo) – Programa de Pós-Graduação em Arquitetura e Urbanismo, da Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2023.
- ZAUK, Fernando; PIRES, Janice. Malhas em projetos paramétricos com superfícies complexas: Um repertório formativo para arquitetura. **Design E Tecnologia**, v. 13, n. 26, p. 119-141, 2023a. https://doi.org/10.23972/det2023iss26pp119-141
- ZAUK, Fernando; PIRES, Janice. Aplicação de malhas na configuração de geometrias complexas da arquitetura: o caso da Biosfera de Montreal. **Educação Gráfica**, Bauru, Brasil, v. 27, n. 1, p. 24-38, 2023b.
- ZAUK, Fernando; PIRES, Janice. Aplicação de malhas na arquitetura: a estrutura de saber que envolve o Projeto Éden. **Scientific Journal ANAP**, v. 1, n. 3, p. 220-234, 2023c.